第八周习题课

—— 实二次型和习题讲解

一. 实二次型

实数域$\mathbb{R}$的特性 ①任意正数都可以开方，任意负数都不能开方。

② $\forall \alpha \in \mathbb{R}$，$\alpha^2 > 0$.

定理1.（惯性定理）

（二次型版本）二次型q（V上的二次型，V是$\mathbb{R}$上的线性空间）存在一组规范基$e_1, \cdots, e_n$使得在该基下的矩阵为$\begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$（对角线为1，-1或0）。而且$k$，$l$由$q$唯一确定。

证明：由定理8.12可知，存在一组基$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$使得$q$在该基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

取$\alpha_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|d_i|}} & d_i \neq 0 \\ 0 & d_i = 0 \end{cases}$，$i=1, \cdots, n$。令$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|d_1|}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{|d_n|}} \end{pmatrix}$，设

$$(e_1, e_2, \cdots, e_n) = (\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n) P.$$

则q在$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$下的矩阵对角线为1，-1或0。再对$\{e_1, \cdots, e_n\}$进行适当的置换，得到$e_1', \cdots, e_n'$，则q在$e_1', \cdots, e_n'$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

设q在另一组基$(\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n)$下的矩阵为$\begin{pmatrix} E_s & & \\ & -E_t & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，则

$k+l = s+t$（合同不改变秩）。反证，若$k > s$，令

$$W = \langle e_1', \cdots, e_k' \rangle$$
$$U = \langle \tilde{e}_{s+1}, \cdots, \tilde{e}_n \rangle$$

则$\dim W = k$，$\dim U = n-s$，$\dim W + \dim U > n$，则根据维数公式，有

$$\dim(W \cap U) = \dim W + \dim U - \dim(W+U) > 0$$

所以$W \cap U \neq \phi$，设$v \in W \cap U$，则$q(v) = q(\alpha_1 e_1' + \cdots + \alpha_k e_k')$

$$= (\alpha_1 \cdots \alpha_k\ 0 \cdots 0)\begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2 > 0$$

但 $q(v) = q(\beta_{s+1}\tilde{e}_{s+1} + \cdots + \beta_n \tilde{e}_n)$

$$= (0\cdots 0\ \beta_{s+1}\cdots\beta_n)\begin{pmatrix}E_s & & \\ & -E_t & \\ & & 0\end{pmatrix}(\ \ ) = -(\beta_{s+1}^2 + \cdots + \beta_{s+t}^2) \leq 0$$ 矛盾.

(选做题). 设 V 是 n 维实空间, $f_1, \cdots, f_{s+t} \in V^*$. 设

$$q = f_1^2 + \cdots + f_s^2 - f_{s+1}^2 - \cdots - f_{s+t}^2$$

(i) 证明: q 是二次型.

(ii) 设 q 的签名为 (k, ℓ). 证明: $k \leq s$ 和 $\ell \leq t$.

证明: (i) 设 $F(X,Y) = f_1(X)f_1(Y) + \cdots + f_s(X)f_s(Y) - f_{s+1}(X)f_{s+1}(Y) - \cdots - f_{s+t}(X)f_{s+t}(Y)$.

则 $q(X) = F(X,X)$. 可以验证 $F(X,Y)$ 是对称双线性型:

(1) $f(\alpha X_1 + \beta X_2, Y) = \alpha f(X_1, Y) + \beta f(X_2, Y)$

(2) $f(X, \alpha Y_1 + \beta Y_2) = \alpha f(X, Y_1) + \beta f(X, Y_2)$

(3) $f(X,Y) = f(Y,X)$.

所以 $q(X) = F(X,X)$ 为二次型.

(ii). 设 q 在 $e_1, \cdots, e_n$ 下的规范型为

$$q = y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_{k+\ell}^2$$

设 $W = \langle e_1, \cdots, e_k \rangle$, 设 $U = \{X \in V \mid f_1(X) = 0, \cdots, f_s(X) = 0\}$. 则 $\dim W = k$, $\dim U \geq n-s$ (?). 所以

$$\dim W + \dim U \geq n + k - s.$$

若 $k > s$. 则 $\dim W + \dim U > n$. 则由维数公式得 $\dim(W \cap U) > 0$.

设 ~~W~~ $v \in W \cap U$, 则

$$\cancel{q(W)=}\ q(v) = q(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k) = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2 > 0$$

$$q(v) = f_1(v)^2 + \cdots + f_s(v)^2 - f_{s+1}(v)^2 - \cdots - f_{s+t}(v)^2 \leq 0.$$ 矛盾.

所以 $k \leq s$. 同理可证 $\ell \leq t$ (或者考虑 $-q$)

$\square$

定理2（惯性定理）（矩阵版本）设 $A\in SM_n(\mathbb{R})$，则存在 $P\in GL_n(\mathbb{R})$，使得 $P^tAP=\begin{pmatrix}E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0\end{pmatrix}$，而且 k,l 由 A 唯一确定．

推论3．设 $A,B\in SM_n(\mathbb{R})$，则 $A\sim_c B \Leftrightarrow A$ 和 B 有共同的签名．

习题1　设 $q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-2x_2x_3$

$$=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\\ \frac{1}{2} & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的二次型，

(1) 计算 q 的签名 (2) 计算 $P\in GL_n(\mathbb{R})$，P^tAP 为对角矩阵．

~~证~~解：

$$\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\\ \frac{1}{2} & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\\ \frac{1}{2} & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1+c_2}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\\ -\frac{1}{2} & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{2} & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2-\frac{1}{2}c_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3+\frac{1}{2}c_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3-3c_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & -\frac{1}{2} & 2\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

令 $P=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 2\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $P^tAP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -\frac{1}{4} & \\ & & 2\end{pmatrix}$，签名为 $(2,1)$

习题3. 设 $f(X,Y)=tr(XY^t)$, $X,Y\in M_n(\mathbb{R})$.

可以验证 $f(X,Y)$ 是对称双线性型，则 $q(X)=f(X,X)$ 是二次型.（命题8.3）

计算可得. 设 $X=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$, 则

$$q(X)=tr(XX^t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$$

$$=(a_{11}\ a_{12}\cdots a_{nn})E_{n^2\times n^2}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix}$$

（取的基为 $E_{1,1}, E_{1,2}\cdots E_{n,n}$） $E_{ij}=\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}\end{array}$

所以签名为 $(n^2,0)$.

二. 正定(非正定)矩阵(二次型)

（n维线性空间 V 上的）

正定二次型: 下列条件都是 q 是正定二次型的充要条件.

(1) 任意 $x\in V$, 有 $q(x)>0$.

(2) q 的签名为 $(n,0)$

(3) q 的规范型为 $x_1^2+\cdots+x_n^2$

(4) 设 q 在某组基下的矩阵为 A. 则存在 $P\in GL_n(\mathbb{R})$, 使得

$$P^tP=A$$

(5) A 的 i 阶顺序主子式大于0, $i=1,\cdots,n$.

（$A\in SL_n(\mathbb{R})$）

正定矩阵: 下列条件都是 A 是正定矩阵的充要条件.

(1) 任意 $x\in\mathbb{R}^n$, 有 $x^tAx>0$.

(2) A 的签名为 $(n,0)$

(3) $A\sim_c E_n$

(4) 存在 $P\in GL_n(\mathbb{R})$, 使得

$$P^tP=A.$$

(5) A 的 i 阶顺序主子式大于0. $i=1,\cdots,n$.

注：$A\sim_c B$，则A和B有相同的签名，则A，B的正定性相同.

(q是n维线性空间V上的二次型)

半正定二次型：下列条件都是q是半正定二次型的充要条件：

(1) 任意$x\in V$，有$q(X)\geq 0$

(2) q的签名为$(k,0)$

(3) q的规范型为$x_1^2+\cdots+x_k^2$

(4) 设q在某组基下的矩阵为A，则存在$P\in M_n(\mathbb{R})$，使得

$$P^tP=A$$

习题2. 计算可得$S\sim_c\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}$.

(1) 不存在，若存在，则S为正定矩阵，矛盾.

(2) 存在. 因为存在$P_0\in GL_n(\mathbb{R})$，使得

$$P_0^tSP_0=\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix},$$

取$Q=P_0^{-1}$，则$S=Q^t\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}Q$

$$=Q^t\begin{pmatrix}1&\\&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&i\end{pmatrix}Q$$ i为虚数单位.

则$P=\begin{pmatrix}1&\\&i\end{pmatrix}Q$为所求.

$P\in GL_n(\mathbb{C})$. □

习题4. 反证. 若任意 $x\in\mathbb{R}^n$, $x^tAx \geq 0$, 则 A 为半正定矩阵, 则存在 $P\in M_n(\mathbb{R})$, 使得

$$P^tP=A.$$

所以 $\det A=\det(P^tP)=(\det P)^2\geq 0$, 矛盾.

$\square$

(暗含A是实对称)

习题5. 因为 A 为正定矩阵, 所以存在 $P\in GL_n(\mathbb{R})$, 使得

$$A=P^tP.$$

当 $m>0$ 时, $A^m=P^tPP^tPP^tPP^tP\cdots P^tP$

$$=\begin{cases}A^{\frac{m}{2}}\cdot A^{\frac{m}{2}}, & m\text{为偶数}\\ \left(A^{\frac{m-1}{2}}P^t\right)\left(PA^{\frac{m-1}{2}}\right), & m\text{为奇数}.\end{cases}$$

所以令 $Q=\begin{cases}A^{\frac{m}{2}}, & m\text{为偶数}\\ PA^{\frac{m-1}{2}}, & m\text{为奇数},\end{cases}$ 则 $A^m=Q^tQ$, 因为 $Q\in GL_n(\mathbb{R})$,

所以 A 为正定矩阵.

当 $m<0$ 时. A^{-1} 也是正定矩阵 (因为 $A^{-1}=(P^tP)^{-1}=P^{-1}(P^{-1})^t=((P^{-1})^t)^t(P^{-1})^t$

$(P^{-1})^t\in GL_n(\mathbb{R})$)

所以 $A^m=(A^{-1})^{-m}$, $-m>0$. 则 $(A^{-1})^{-m}$ 也是正定矩阵.

$\square$

补充：设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，证明：

(1) $A^t A \in SM_n(\mathbb{R})$ 且半正定.

(2) 设 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$，则

$A^t A \vec{x} = \vec{0}$ 和 $A\vec{x} = \vec{0}$ 的解空间相同.

(3) $\mathrm{rank}(A^t A) = \mathrm{rank}(A)$.

证明：(1) 因为 $(A^t A)^t = A^t (A^t)^t = A^t A$，所以 $A^t A \in SM_n(\mathbb{R})$

设 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$，则

$$\vec{x}^t (A^t A) x = (A\vec{x})^t A x \quad , \left(Ax = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right)$$

$$= (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 \geq 0.$$

所以 $A^t A$ 半正定.

(2) 设 $A\vec{x} = \vec{0}$，则显然 $A^t A \vec{x} = A^t (A\vec{x}) = 0$.

~~解~~反之设 $A^t A \vec{x} = \vec{0}$，则 $\vec{x}^t A^t A \vec{x} = 0$，所以

$$(A\vec{x})^t A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow A\vec{x} = \vec{0}$$

所以 $A^t A \vec{x} = \vec{0}$ 和 $A\vec{x} = \vec{0}$ 同解.

(3) ~~rank~~ 由对偶定理可得

$$\mathrm{rank}(A^t A) = n - \dim(\mathrm{sol}(A^t A))$$

$$\mathrm{rank}(A) = n - \dim(\mathrm{sol}(A))$$

所以 $\mathrm{rank}(A^t A) = \mathrm{rank}(A)$

$\square$