计算题.

1. 求 $sol(H)$ 的基
2. 求解流形
3. $im\phi$, $ker\phi$ 的基 (例6.7)
4. 求矩阵的乘法 (例6.18, 例6.19).

解空间:

例1.22 考虑齐次线性方程组 H

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1+\cdots+a_{m,n}x_n=0 \end{cases}$$

设 $V_i = sol(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=0)$, $i=1,2,\cdots,m$. 则

$$sol(H)=\bigcap_{i=1}^{m}V_i.$$

证明: 设 $\vec{v}=(v_1,\cdots,v_n)\in sol(H)$, 则对任意 $i\in\{1,\cdots,m\}$, 有

$$a_{i,1}v_1+\cdots+a_{i,n}v_n=0.$$

即 $\vec{v}\in V_i$, $i=1,\cdots,m$. 所以 $\vec{v}\in\bigcap_{i=1}^{m}V_i$, 得 $sol(H)\subset\bigcap_{i=1}^{m}V_i$.
反之, 若 $\vec{v}=(v_1,\cdots,v_n)\in\bigcap_{i=1}^{m}V_i$, 则对任意 $i\in\{1,\cdots,m\}$, 有
$v\in V_i$. 即 $a_{i1}v_1+\cdots+a_{in}v_n=0$, 所以 $\vec{v}\in sol(H)$, 得 $\bigcap_{i=1}^{m}V_i\subset sol(H)$.
综上 $\bigcap_{i=1}^{m}V_i = sol(H)$.

□

维数相关的公式:

1. $\dim U+\dim V=\dim(U+V)+\dim(U\cap V)$
2. $\dim(sol(H))+rank(A)=n$.
3. $\dim(ker(\phi))+\dim(im(\phi))=n$. ϕ 是 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 的线性映射.

扫描全能王 创建

（参照例6.7）

设 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的标准基，$\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基.

线性映射 $\phi:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^2$ 由

$$\begin{cases}\phi(\vec{e}_1)=\vec{\varepsilon}_1+\vec{\varepsilon}_2\\ \phi(\vec{e}_2)=-\vec{\varepsilon}_1-\vec{\varepsilon}_2\\ \phi(\vec{e}_3)=-\vec{\varepsilon}_1+\vec{\varepsilon}_2\\ \phi(\vec{e}_4)=\varepsilon_1-3\varepsilon_2\end{cases}$$

确定. 计算：

(i) ϕ 在 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4$；$\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2$ 下的矩阵

(ii) 计算 $\ker\phi$ 和 $\operatorname{im}\phi$ 的维数

(iii) 分别计算 $\ker\phi$ 和 $\operatorname{im}\phi$ 的一组基底.

$$\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m.$$

回顾：$A=(\phi(\vec{e}_1),\cdots,\phi(\vec{e}_n))$ 是线性映射 ϕ 在标准基下的矩阵表示.

例5.17

$$\begin{cases}\operatorname{im}\phi=\phi(\mathbb{R}^n)=\{\phi(\vec{v})\mid v\in\mathbb{R}^n\}=\{\sum_{i=1}^{n}a_i\phi(\vec{e}_i)\mid a_i\in\mathbb{R}\}\\ \qquad=V_c(A)\subset\mathbb{R}^m\\ \ker\phi=\{\vec{v}\in\mathbb{R}^n\mid\phi(\vec{v})=0\}=\{\underset{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}}{\vec{v}}\in\mathbb{R}^n\mid x_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+x_n\vec{A}=0\}\\ \qquad=sol(H)\end{cases}$$

H是由A确定的齐次线性方程组.

解：(i) 由定义可知：

$$A_\phi=(\phi(\vec{e}_1),\phi(\vec{e}_2),\phi(\vec{e}_3),\phi(\vec{e}_4))=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\1&-1&1&-3\end{pmatrix}$$

扫描全能王 创建

(ii) 利用初等行变换得

$$A_\phi \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

因为 $rank(A_\phi)=2$，所以 $dim(im(\phi))=dim(V_c(A_\phi))=2$. 由对偶定理可知，$dim(ker\phi)=4-2=2$.

(iii) $ker(\phi)$ 对应的齐次线性方程组是

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 取 x_2=1, x_4=0, 得 \ x_1=1, \ x_3=0 \\ 取 x_2=0, x_4=1, 得 \ x_1=1 \quad x_3=2 \end{array}$$

于是 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix} \in ker\phi$，且线性无关，由于 $dim(ker(\phi))=2$，

所以 $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ 是 $ker\phi$ 的一组基.

由上述阶梯型矩阵可以看出，$\overset{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}{\overset{\shortparallel}{\vec{A}_\phi^{(1)}}}$，$\overset{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}{\overset{\shortparallel}{\vec{A}_\phi^{(3)}}}$ 线性无关，又因为 $rank(A)=2$，即 $V_c(A)=2$，所以 $\vec{A}_\phi^{(1)}$，$\vec{A}_\phi^{(3)}$ 是 $V_c(A)$ 的一组基，即 $\vec{A}_\phi^{(1)}$，$\vec{A}_\phi^{(3)}$ 是 $im(\phi)$ 的一组基.

$\square$

扫描全能王 创建

求解流形(例4.9)

1. 化增广矩阵为行阶梯型.

2. 判断是否相容

3. 求一个特解 $\vec{v}$

4. 求齐次线性方程组的解空间的一组基 $\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_s$.

5. 则 $sol(L) = \vec{v} + \langle \vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_s \rangle$.

验证是否为线性映射: $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 的映射.

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\phi(\vec{x}+\vec{y}) = \phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y}) \text{ 和 } \phi(\alpha\vec{x}) = \alpha\phi(\vec{x}).$$

则称 ϕ 是线性映射.

线性映射的性质:

1. 由定义, $\phi(\vec{x}+\vec{y}) = \phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y})$, $\phi(\alpha\vec{x}) = \alpha\phi(\vec{x})$.

2. $\phi(\alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{x}_k) = \alpha_1\phi(x_1) + \cdots + \alpha_k\phi(x_k)$.

3. 设 $U = \langle \vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_d \rangle$, 则

$$\phi(U) = \langle \phi(\vec{u}_1), \cdots, \phi(\vec{u}_d) \rangle.$$

特别地 ←(命题5.13)

$\dim(U) \geq \dim(\phi(U))$

(例5.8用到)

命题5.7.

4. 如果 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 线性相关, 则 $\phi(\vec{v}_1), \cdots, \phi(\vec{v}_k)$ 也线性相关

5. 如果 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 则 $\phi(U)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间, 特别地, $im(\phi)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间.

6. 如果 W 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间, 则 $\phi^{-1}(W)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 特别地, $\ker\phi$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

☆ 7. ϕ 是单射当且仅当 $\ker(\phi) = \{0_n\}$; (例5.12用到).

ϕ 是满射当且仅当 $im(\phi) = \mathbb{R}^m$;

扫描全能王 创建

(定理5.14)(定理6.5). m行n列的矩阵

8.(线性映射基本定理) $\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^m$的线性映射和$\mathbb{R}^{m\times n}$中的矩阵存在一一对应.

$$A \longrightarrow \phi_A \qquad \text{(例5.17)}$$

$$\phi \longrightarrow A_\phi = (\phi(e_1), \cdots, \phi(e_n)).$$

9. 设$\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$是线性映射. 则$\phi$是单射$\Leftrightarrow$ ϕ是满射.

第4题: 设ϕ是满射且W是$\mathbb{R}^m$的子空间, 证明 ($\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

$$\dim(\phi^{-1}(W)) \geq \dim(W).$$

$$\phi^{-1}(W) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \phi(\vec{v}) \in W\}.$$

方法1: 设W的一组基是$\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_d$. 因为$\phi$是满射, 所以存在$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_d \in \mathbb{R}^n$, 使得$\phi(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$, $i=1,\cdots,d$. 因为$\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_d$线性无关, 所以$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_d$线性无关(线性映射保持线性相关性). 又因为$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_d \in \phi^{-1}(W)$, 而且由$\phi$是线性映射可知$\phi^{-1}(W)$是$\mathbb{R}^n$的子空间, 所以

$$\dim(\phi^{-1}(W)) \geq d = \dim(W)$$

□

方法2: 由$\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$是线性映射, W是$\mathbb{R}^m$的子空间, 可知$\phi^{-1}(W)$是$\mathbb{R}^n$的子空间. 设$U = \phi^{-1}(W)$, $u_1, \cdots, u_d$是U的一组基, 由ϕ是满射, 我们有$\phi(U) = W$, 进而

$$W = \phi(U) = \langle \phi(u_1), \cdots, \phi(u_d) \rangle$$

所以$\dim W \leq d = \dim(\phi^{-1}(W))$.

□.

扫描全能王 创建

当ϕ不是满射时，结论不一定对，比如

$$\phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$
$$\vec{v} \longmapsto \vec{0}$$

取 $W=\mathbb{R}^3$，则 $\phi^{-1}(W)=\mathbb{R}^2$，但

$$3=\dim(W) > \dim(\phi^{-1}(W))=2.$$

5. 计算秩（初等变换不改变矩阵的秩）.

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & a_1 \\ & 1 & & & a_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & a_{n-1} \\ & & & & a_0 \end{pmatrix}$$

所以 $\operatorname{rank}(A)=n$.

扫描全能王 创建