1. 举例说明

(1)

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，　$\Delta_1=1$，$\Delta_2=2-1=1>0$

$\Rightarrow A$ 正定.

但 $a_{12}=a_{21}=-1<0$

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$　$\det(A)=2-12=-10<0$.

$\Rightarrow A$ 不是正定.

2. q 在标准基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

A 负定 $\Leftrightarrow$ $B=-A=\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 正定.

设 B 的 i 阶顺序主子式为 Δ_i，$i=1,2,3$.

$\Delta_1=-\lambda>0$

$\Delta_2=\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-2\lambda-1>0$　　$\Rightarrow \lambda<-\frac{3}{5}$

$\Delta_3=|B|=-5\lambda-3>0$

Lemma. 设 q 是 $\mathbb{R}$ 上有限维线性空间 V 上的二次型，则 q(半)正定当且仅当 $-q$(半)负定. 类似地，设 $A\in SM_n(\mathbb{R})$，则 A(半)正定当且仅当 $-A$(半)负定.

Pf: 设 $\vec{x}\in V\backslash\{\vec{0}\}$. 则

$$q(\vec{x})\geq 0 \Leftrightarrow -q(\vec{x})\leq 0 \text{ 和 } q(\vec{x})>0 \Leftrightarrow -q(\vec{x})<0.$$

设 $A\in SM_n(\mathbb{R})$，$\Delta_1,\cdots,\Delta_n$ 是 A 的顺序主子式。证明：A 负定当且仅当 $(-1)^k\Delta_k>0$，$k=1,2,\cdots,n$.

Pf: 设 $\Omega_1,\cdots,\Omega_n$ 是 $-A$ 的顺序主子式，则 $\Omega_i=(-1)^i\Delta_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 由 Sylvester 判别法可知，$-A$ 正定当且仅当 $\Omega_1>0,\Omega_2>0,\cdots,\Omega_n>0$，即 $(-1)^k\Delta_k>0$，$k=1,2,\cdots,n$

由 lemma 可知，A 负定 $\Leftrightarrow$ $(-1)^k\Delta_k>0$，$k=1,2,\cdots,n$.

3. Pf: B 正定，则 $B\sim_c E_{n-1}$.

$$\Rightarrow A\sim_c \underbrace{\begin{pmatrix} E_{n-1} & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & \alpha \end{pmatrix}}_{M} \qquad (1)$$

其中 $\alpha\in\mathbb{R}$. 因为 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(M)$，所以 $\det(M)=0$，即 $\alpha=0$. 于是 A 的惯性指数是 $(n-1,0)$，A 半正定

4. 易得 $\forall (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. $q(\vec{x})\geq 0$

$\Rightarrow$ q半正定.

从而由惯性定理可知 q在 V的某组基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_k},\vec{e_{k+1}},\cdots,\vec{e_3}$ 下的规范型是

$q(\vec{x})=x_1^2+\cdots+x_k^2$, 其中 $k=\mathrm{rank}(q)$.

Claim: $C_q=\underbrace{<\vec{e_{k+1}},\cdots,\vec{e_3}>}_{U}$

首先 $U\subseteq C_q$. 设 $\vec{v}=v_1\vec{e_1}+\cdots+v_n\vec{e_n}\in C_q$, 则 $q(\vec{v})=v_1^2+\cdots+v_k^2=0$.

由于 $v_1,\cdots,v_k\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $v_1=v_2=\cdots=v_k=0$

$\Rightarrow \vec{v}\in U$

$\Rightarrow C_q\subset U$.

综上, $U=C_q$.

$q(\vec{x})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1-x_3=0 \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \\ 3x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$ 对应系数矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\2&1&-1\\3&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\\0&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dim(C_q)=3-2=1$.

$\Rightarrow 3-k=1$.

$\Rightarrow k=2$.

$\Rightarrow$ 惯性指数为 $(2,0)$.

5. pf: 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 则 $E+\varepsilon A$ 的顺序主子式为

$$\Delta_k(\varepsilon)=|E_k+\varepsilon A_k|=\begin{vmatrix}1+\varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} & \cdots & \varepsilon a_{1k}\\ \varepsilon a_{21} & 1+\varepsilon a_{22} & \cdots & \varepsilon a_{2k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varepsilon a_{k1} & \varepsilon a_{k2} & \cdots & 1+\varepsilon a_{kk}\end{vmatrix}=.$$

$\Delta_k(\varepsilon)$是关于 ε 的多项式, 结合 $\Delta_k(0)=1$.

由 $\Delta_k(\varepsilon)$连续性可知, $\exists\,\delta_k>0$, s.t. $\forall\,\varepsilon\in(-\delta_k,\delta_k)$, $\Delta_k(\varepsilon)>0$ $k=1,2,\cdots,n$)

令 $\delta=\min\{\delta_1,\cdots,\delta_n\}$, 则当 $\varepsilon\in(-\delta,\delta)$ 时, $\Delta_k(\varepsilon)>0$, $k=1,2,\cdots,n$.

$\Rightarrow$ 当 $\varepsilon\in(-\delta,\delta)$ 时

设 $A\in M_n(F)$. 称 A 的子式

$$M\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ i_1, i_2, \cdots, i_k \end{pmatrix},\quad \text{其中 } 1\le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n, \text{称为}A\text{的一个}k\text{阶主子式}.$$

特别地，

$$M\begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, k \\ 1, 2, \cdots, k \end{pmatrix}$$

称为 A 的 k 阶顺序主子式.

(Jacobi公式) Thm. 设 $A\in SM_n(F)$. 设 $\Delta_0=1$，Δ_i 是 A 的 i 阶顺序主子式. 如果 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ 都非零，则

$$A \sim_c \operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$$

证.

Thm. 设 $A\in SM_n(\mathbb{R})$. 设 Δ_k 是 A 的 k 阶顺序主子式，$k=1,2,\cdots,n$. 则下列条件等价

(i) A 正定

(ii) A 的任何 k 阶主子式都 >0.

(iii) $\Delta_1>0, \cdots, \Delta_n>0$.

例 求二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_i^2+4\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j$ 的符号差.

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$ 设 f 对应的矩阵为 A.

$$|A_n|=\begin{vmatrix} 1+2(n-1) & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1+2(n-1) & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & & & & \\ 1+2(n-1) & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (2n-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & & & & \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(2n-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (2n-1)(-1)^{n-1} \ne 0.$$

令 $\Delta_0=1$，$\Delta_1=|A_1|=1$，$\dfrac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}<0$，$k=1,2,\cdots,n$.

由 Jacobi 公式知，$A\overset{\operatorname{diag}}{\sim_c}\left(\underset{\overset{\vee}{0}}{\frac{\Delta_1}{\Delta_0}}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$.

$\Rightarrow$ 签名为 $(1, n-1)$.

设 $f(\vec{x})=\vec{x}^t A\vec{x}$ 为实二次型，且 $\exists \vec{x_1},\vec{x_2}$, s.t $f(\vec{x_1})>0$, $f(\vec{x_2})<0$. 证明：$\exists \vec{x_3}\neq\vec{0}$, s.t $f(\vec{x_3})=0$

解：设 $A\sim_c\begin{pmatrix}E_s&&\\&-E_t&\\&&0\end{pmatrix}$. 其中 $s,t\in\mathbb{N}$. 设 $A=P^t\begin{pmatrix}E_s&&\\&-E_t&\\&&0\end{pmatrix}P$. P 可逆

令 $Y=PX$，则 $f(X)=X^tAX=X^tP^t\begin{pmatrix}E_s&&\\&-E_t&\\&&0\end{pmatrix}PX=Y^t\begin{pmatrix}E_s&&\\&-E_t&\\&&0\end{pmatrix}Y$.

由 $\exists x_1,x_2$, s.t $f(\vec{x_1})>0$, $f(\vec{x_2})<0$. 则 $s,t>0$

$\therefore f(\vec{x})=y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_{s+t}^2$

令 $Y_3=(1,0,\cdots 0,\overset{s+1}{1},0\cdots,0)^t\neq 0$，则 $X_3=P^{-1}Y_3\neq\vec{0}$, $f(\vec{x_3})=1^2+0+\cdots+0-1^2-0-\cdots-0=0$

Hadamard 乘积

$A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$, $B=(b_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$

Def $A\odot B=(a_{ij}b_{ij})_{n\times n}$

例 $\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$

prop. (i) $A\odot(B+C)=A\odot B+A\odot C$

(ii) $A\odot B=B\odot A$

(iii) $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\odot A=A\odot\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}=A$

$\Rightarrow$ $(M_n(\mathbb{R}),+,\odot,O_{n\times n},\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix})$ 为交换环

(iv) A 关于 $\odot$ 可逆 $\Leftrightarrow \forall 1\le i,j\le n$, $a_{ij}\neq 0$.

(Schur 定理) 设 A,B 是 n 阶(半)正定矩阵，则 $A\odot B$ 也是(半)正定的.

(Schur 不等式) 设 A,B 为半正定矩阵，则有 $|A\odot B|\geq |A|\cdot|B|$.

recall: $A=(a_{ij})$ 正定，则 $|A|\le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$, "=" 成立当且仅当 A 为对角矩阵

"$\Leftarrow$": A 为对角矩阵, $|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. ✓

"$\Rightarrow$": 对 n 归纳. $n=1$ ✓

设 $n>1$ 且结论对 $n-1$ 阶正定矩阵成立.

设 $A=\begin{pmatrix}A_{n-1}&\vec{x}\\\vec{x}^t&a\end{pmatrix}$, 其中 $A_{n-1}\in SM_n(\mathbb{R})$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^{n-1}$, $a\in\mathbb{R}$

则 A_{n-1} 正定且 $a>0$ （A 正定 $\Leftrightarrow$ A 顺序主子式 >0）

由分块行列相伴消元法可知, $|A|=|A_{n-1}|(a-\vec{x}^tA_{n-1}^{-1}\vec{x})$

$\because |A|>0,\ |A_{n-1}|>0,\quad \therefore a-\vec{x}^tA_{n-1}^{-1}\vec{x}>0$

又$\because A_{n-1}^{-1}$ 正定，$\therefore \vec{x}^tA_{n-1}^{-1}\vec{x}\geq 0$

$\Rightarrow\quad 0<a-\vec{x}^tA_{n-1}^{-1}\vec{x}\leq a$

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$， $a=a_{nn}$， $|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}\,a=|A_{n-1}|\,\boxed{\underbrace{(a-\vec{x}^tA_{n-1}^{-1}\vec{x})}_{>0}\leq a}$

$\therefore\quad |A_{n-1}|\geq a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}$

A_{n-1} 正定， $|A_{n-1}|\leq a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}$.

$\Rightarrow |A_{n-1}|=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}$，

$\Rightarrow$ $\therefore A_{n-1}$是对角矩阵 且 $0=\vec{x}^tA_{n-1}^{-1}\vec{x}$.

A_{n-1} 正定 $\Rightarrow A_{n-1}^{-1}$ 正定. 且 $\vec{x}^tA_{n-1}^{-1}\vec{x}=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$

$\Rightarrow A$ 是对角矩阵.

Claim1:

$$f(y_1,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0\end{vmatrix}$$ 是负定的.

Pf: 作变换 $\vec{y}=A\vec{z}$，即:
$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$$

则

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{11}z_1+\cdots+a_{1n}z_n\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n1}z_1+\cdots+a_{nn}z_n\\ y_1 & \cdots & y_n & 0\end{vmatrix}\ \xrightarrow[(i=1,2,\cdots,n-1)]{C_n-z_iC_i}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0\\ y_1 & \cdots & y_n & -(y_1z_1+\cdots+y_nz_n)\end{vmatrix}$$

$=-|A|(y_1z_1+\cdots+y_nz_n)$

$=-|A|\vec{y}^t\vec{z}=\underbrace{-|A|}_{<0}\vec{z}^tA\vec{z}$

A正定， $-|A|<0$

$\Rightarrow f(y_1,\cdots,y_n)$为负定二次型

claim: $|A| \le a_{nn}|A_{n-1}|$，等式成立 $\iff a_{1n}=a_{2n}=\cdots=a_{n-1,n}=0$

证:
$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n}+0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}+0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0+a_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix}}_{=f(a_{1,n},\cdots,a_{n-1,n}) \le 0} + a_{nn}|A_{n-1}| \le a_{nn}|A_{n-1}|$$

$$f(a_{1,n},\cdots,a_{n-1,n})=0 \iff a_{1,n}=a_{2,n}=\cdots=a_{n-1,n}=0$$

定理

(对n归纳). $n=1$ ✓

假设n-1成立，A_{n-1}正定，则 $|A_{n-1}| \le a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1} \iff A_{n-1}$为对角矩阵.

$$|A| \le a_{nn}|A_{n-1}| \le a_{nn}a_{11}\cdots a_{n-1,n-1}.$$

"="成立 $\iff$ $|A|=a_{nn}|A_{n-1}|$ 且 $|A_{n-1}|=a_{11}\cdots a_{n-1,n-1}$.

$\iff a_{ij}=0,\ i\ne j$

$\Rightarrow$ A为对角矩阵.

下证 schur 不等式

n=1时显然成立

假设结论对n-1成立，考虑n的情形.

$|A|=0$ 或 $|B|=0$，由 $A\circ B$ 半正定，$|A\circ B| \ge 0 = |A||B|$.

$|A|\ne 0$, A正定. 又 $|B|\ne 0$, B正定

$$C=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}-\frac{|A|}{|A_{n-1}|} \end{pmatrix}$$

A正定，则 $|A_{n-1}|>0$

$$|C|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & -\frac{|A|}{|A_{n-1}|} \end{vmatrix} = |A|-\frac{|A|}{|A_{n-1}|}|A_{n-1}|=0$$

C半正定的，(作法同上问)

A_{n-1}正定 $\Rightarrow \exists\, P\in GL_n(\mathbb{R})$, s.t. $P^tA_{n-1}P=E_{n-1}$.

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} P^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \vec{x} \\ \vec{x}^t & a_{nn}-\frac{|A|}{|A_{n-1}|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_{n-1} & P^t\vec{x} \\ \vec{x}^t P & a_{nn}-\frac{|A|}{|A_{n-1}|} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{合同变换}} \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由 schur 乘积定理可知，

$$C \odot B \text{半正定} \Rightarrow |C \odot B| \geq 0$$

故

$$|C\odot B| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1,n-1}b_{1,n-1} & a_{1,n}b_{1,n}+0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1}b_{n-1,1} & - & - & a_{n-1,n-1}b_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}b_{n-1,n}+0 \\ a_{n,1}b_{n,1} & - & - & a_{n,n-1}b_{n,n-1} & \left(a_{nn}-\frac{|A|}{|A_{n-1}|}\right)b_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1}b_{1,n-1} & a_{1,n}b_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n-1,1}b_{n-1,1} & - & - & a_{n-1,n-1}b_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}b_{n-1,n} \\ a_{n,1}b_{n,1} & - & - & a_{n,n-1}b_{n,n-1} & a_{nn}b_{nn} \end{vmatrix} - \frac{|A|}{|A_{n-1}|}|A_{n-1}\odot B_{n-1}|$$

由顺序主子式可以看出.

$$= |A\odot B| - \frac{|A|}{|A_{n-1}|}a_{nn}|A_{n-1}\odot B_{n-1}| \geq 0$$

归纳假设.

$$\Rightarrow |A\odot B| \geq b_{nn}\frac{|A|}{|A_{n-1}|}|A_{n-1}\odot B_{n-1}| \geq b_{nn}\frac{|A|}{\cancel{|A_{n-1}|}}\cancel{|A_{n-1}|}\cdot|B_{n-1}|$$

$$= b_{nn}|A||B_{n-1}| \overset{\text{claim}}{\geq} |A|\cdot|B|$$

$$\Rightarrow |A\odot B| \geq |A|\cdot|B|.$$

线性映射.

设 V, W 为域 F 上的线性空间，$\{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ 为 V 的基，$\{\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_m}\}$ 为 W 的基，

$\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$，设 $\varphi(\vec{e_i}) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\vec{\varepsilon_k} = (\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_m})\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$，$i=1,\dots,n$

Avg of ①

则 $(\varphi(\vec{e_1}), \dots, \varphi(\vec{e_n})) = (\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_m})\underset{\downarrow}{A}$

φ 在 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$；$\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_m}$ 下的矩阵 A 唯一 ①

$$\mathrm{Hom}(V,W) \cong F^{m\times n}$$

$$\varphi \longmapsto A_\varphi$$

$$\varphi_A \longleftarrow A$$

$\varphi_A: \vec{x} \to A\vec{x}$

$$\mathrm{rank}(\varphi) := \mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{im}(\varphi))$$

例 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ 求 $\varphi: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$, $x \longmapsto xA$ 在 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵表示和秩.

$$\varphi(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12}$$

$$\varphi(E_{12}) = cE_{11} + dE_{12}$$

$$\varphi(E_{21}) = aE_{21} + bE_{22}$$

$$\varphi(E_{22}) = cE_{21} + dE_{22}$$

$$\Rightarrow (\varphi(E_{11}), \varphi(E_{12}), \varphi(E_{21}), \varphi(E_{22})) = (E_{11}, E_{22}, E_{21}, E_{22})\begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rank}\,\varphi = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(A) = 2\,\mathrm{rank}(A)$$