第九周习题课

——作业讲解，线性映射的矩阵表示.

1. 举例说明：

(i) 正定矩阵 (a_{ij}) 可以在某些 (i,j) 处的值 a_{ij} 是负的；

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$，因为 A 的一阶顺序主子式为 1，二阶主子式顺序主子式为 $\frac{3}{4}$，都大于 0，所以 A 是正定的.

(ii) 实对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 所有的值都是正的，但 A 可以不是正定的.

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

（q 是 n 维线性空间 V 上的二次型）

复习：q 是正定二次型的充要条件：

① $\forall X \overset{\neq 0}{\in} V$，有 $q(X)>0$.　　（这里可以再解释一下正惯性指数）

② q 的签名为 $(n,0)$，即 q 的正惯性指数为 n，负惯性指数为 0.

③ q 的规范型形如 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$.

④ 设 A 为 q 在 V 的某组基下的矩阵，则 A 为正定矩阵.

矩阵 $A\in SM_n(R)$ 是正定矩阵的充要条件：

① 设 q_A 是 R^n 上标准基下矩阵为 A 的二次型，则 q_A 是正定二次型.

即 $\forall X \overset{\neq 0}{\in} R^n$，有 $X^tAX>0$

② $A\sim_c E_n$.

③ A 的签名为 $(n,0)$.

④ 存在可逆矩阵 P，使得 $A=P^tP$.

⑤ A 的各阶顺序主子式大于 0.

q为负定二次型 $\Leftrightarrow$ $-q$为正定二次型.

A为负定矩阵 $\Leftrightarrow$ $-A$为正定矩阵,

q为半正定二次型的充要条件:

① $\forall X\in V$, 有 $q(X)\geq 0$.

② q的签名为 $(k,0)$, $k\leq n$. ({正定} $\subset$ {半正定})

③ q的规范型形如 $z_1^2+\cdots+z_k^2$, $k\leq n$.

④ 设A是q在某组基下的矩阵, 则A为半正定矩阵.

A为半正定矩阵的充要条件:

① $\forall X\in \mathbb{R}^n$, $X^tAX\geq 0$

② A的签名为 $(k,0)$, $k\leq n$.

③ $A\sim\begin{pmatrix}E_k & \\ & 0\end{pmatrix}$, $k\leq n$

④ 存在矩阵 $P\in M_n(\mathbb{R})$, 使得 $A=P^tP$.

2. 实二次型

$$q(X)=\lambda x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$$

在λ取什么值时是负定的.

解: 设$\tilde{q}(X)=-q(X)$, 则$q(X)$是负定的当且仅当$\tilde{q}(X)$是正定的.

因为$\tilde{q}(X)$在标准基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

方法一：计算 $\Delta_1 = -\lambda > 0$

$\Delta_2 = -2\lambda - 1 > 0$

$\Delta_3 = -5\lambda - 3 > 0$，

解得 $\lambda < -\frac{3}{5}$.

方法二：

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2 + \frac{1}{3}c_1]{r_2 + \frac{1}{3}r_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 - \frac{1}{3}c_1]{r_3 - \frac{1}{3}r_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\lambda - \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 + \frac{2}{5}c_2]{r_3 + \frac{2}{5}r_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda - \frac{1}{3} - \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

所以 $q(X)$ 为正定矩阵当且仅当 $-\lambda - \frac{1}{3} - \frac{4}{15} > 0$，即 $\lambda < -\frac{3}{5}$. □

注意：不能随便除以λ，或者除以关于λ的表达式.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} B & v \\ v^t & a \end{pmatrix}$，$B$ 正定，$\det A = 0$，证明 A 为半正定.

证：因为 B 正定，所以 B 可逆，设 $Q = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -B^{-1}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则

$$Q^t A Q = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & a - v^t B^{-1} v \end{pmatrix}.$$

因为 $\det A = 0$，$\det B \neq 0$，所以 $a - v^t B^{-1} v = 0$，于是

$$A \sim_c \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

又因为 B 为正定矩阵，所以 $B \sim_c E_{n-1}$，则 $A \sim_c \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A 半正定. □

4. 设 $q=(x_1+x_2)^2+3(x_1-x_3)^2+2(2x_1+x_2-x_3)^2+5(3x_1+x_2-2x_3)^2$ 是 R^3 上的二次型，求 q 的签名.

解：设 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，则该变换为可逆的坐标变换，

得 $q=y_1^2+3y_2^2+2(y_1+y_2)^2+5(y_1-2y_2)^2$

$=8y_1^2+25y_2^2+24y_1y_2$.

$=(y_1\ y_2\ y_3)\begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 12 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

因为 $\begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 12 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim_c\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以 q 的签名为 $(2,0)$.

□.

5. 设 A 是实对称矩阵，E 是同阶单位矩阵，ε 是充分小的实数，证明：方阵 $E+\varepsilon A$ 是正定的.

证明：因为 A 是对称的，所以存在可逆矩阵 P，使得

$$P^tAP=D \quad ,\ D\text{ 对角}.$$

则 $P^t(E+\varepsilon A)P=(P^tE+P^t\varepsilon A)P=(P^tEP+P^t\varepsilon AP)$

$\neq E_n+\varepsilon D \ \cancel{=(1+\varepsilon)E_n}$

(问题：$P^tP\neq E_n$)

走不下去.

另解：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则 A 的 s 阶顺序主子式为

$$D_s=\begin{vmatrix} 1+\varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} & \cdots & \varepsilon a_{1s} \\ \varepsilon a_{21} & 1+\varepsilon a_{22} & \cdots & \varepsilon a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon a_{s1} & \varepsilon a_{s2} & \cdots & 1+\varepsilon a_{ss} \end{vmatrix}$$

根据行列式定义，有 $D_s=(1+\varepsilon a_{11})(1+\varepsilon a_{22})\cdots(1+\varepsilon a_{ss})+\varepsilon\cdot f$

$=1+\varepsilon f_1+\varepsilon f_2$， $f, f_1, f_2\in R[\varepsilon]$

所以 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} D_s = 1 > 0$，则 ε 充分小时，$D_s > 0$，于是 A 是正定的.

2. 线性映射的矩阵表示

设 $v_1,\cdots,v_n$ 是 V 的一组基，$w_1,\cdots,w_m$ 是 W 的一组基，设 ϕ 是 V 到 W 的线性映射，则由线性映射基本定理Ⅱ可知，ϕ 由它在 V 的基下的像唯一确定，于是我们考虑

$$\left(\phi(v_1),\phi(v_2),\cdots,\phi(v_n)\right)\in W^n.$$

对于每一个 $\phi(v_i)\in W$，都可以写出它的坐标表示

$$\phi(v_i) = (w_1 \cdots w_m)\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi}\end{pmatrix}$$

把坐标列成一张表.

$$\phi(v_1,\cdots,v_n)$$

所以 $$\left(\phi(v_1),\phi(v_2),\cdots,\phi(v_n)\right) = (w_1 \cdots w_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n}$$

称 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为 ϕ 在 $v_1,\cdots,v_n;\ w_1,\cdots,w_m$ 下的矩阵.

例. 和去年学的 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射在标准基 $e_1,\cdots,e_n;\ \varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m$ 的联系.

设 $V=\mathbb{R}^2$，$W=\mathbb{R}^3$，$\phi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}a+\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}b,\ 即\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

所以 ϕ 在标准基 $\overset{e_1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}},\overset{e_2}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}};\overset{\varepsilon_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}},\overset{\varepsilon_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}},\overset{\varepsilon_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$ 下，（一个 $\mathbb{R}^m$ 的元素在标准基下的坐标等于本身）

$$\left(\phi\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right),\phi\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right)=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\3&4\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\3&4\end{pmatrix}$$

所以 $(\varphi(e_1),\varphi(e_2))=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\3&4\end{pmatrix}$ 就是 φ 在标准基下的矩阵.

线性映射在基下的矩阵:

① 设 $\varphi: V\longrightarrow W$, $v\in V$, 设 A 是 φ 在 $v_1,\cdots,v_n$; $w_1,\cdots,w_m$ 下的矩阵, 设 v 在 $v_1,\cdots,v_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, 则 $\varphi(v)$ 在 $w_1,\cdots,w_m$ 下的坐标为 $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

证明: $\varphi(v)=\varphi(x_1v_1+\cdots+x_nv_n)$

$$=x_1\varphi(v_1)+\cdots+x_n\varphi(v_n)=(\varphi(v_1),\cdots,\varphi(v_n))\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

又因为 $(\varphi(v_1),\cdots,\varphi(v_n))=(w_1,\cdots,w_m)A$. 所以

$$\varphi(v)=(w_1,\cdots,w_m)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(w_1,\cdots,w_m)\left(A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right).$$

所以 $\varphi(v)$ 在 $w_1,\cdots,w_m$ 下的坐标为 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

②. 设 $\varphi: U\rightarrow V$, $\psi: V\longrightarrow W$, 设 A 是 φ 在 $u_1,\cdots,u_n$; $v_1,\cdots,v_m$ 下的矩阵, B 是 ψ 在 $v_1,\cdots,v_m$; $w_1,\cdots,w_s$ 下的矩阵, 则 BA 是 $\psi\circ\varphi$ 在 $u_1,\cdots,u_m$; $w_1,\cdots,w_s$ 下的矩阵.

证明: $(\psi\circ\varphi(u_1),\cdots,\psi\circ\varphi(u_n))$

$$=\left(\psi\left((v_1,\cdots,v_m)\left(A^{(1)}\right)\right),\cdots,\psi\left((v_1,\cdots,v_m)\left(A^{(n)}\right)\right)\right)$$

$$=\left((w_1,\cdots,w_s)B\left(A^{(1)}\right),\cdots,(w_1,\cdots,w_s)B\left(A^{(n)}\right)\right)=(w_1,\cdots,w_s)(BA^{(1)},\cdots,BA^{(n)})$$

$$=(w_1,\cdots,w_s)B\left(A^{(1)}A^{(2)}\cdots A^{(n)}\right)$$

$$=(w_1,\cdots,w_s)BA.$$

所以 $\psi\circ\varphi$ 在 $u_1,\cdots,u_m$; $w_1,\cdots,w_s$ 下的矩阵为 BA.