第九周习题课

1. (1) 证明：ϕ 是线性映射.

(2) 由定义得

$$A_\phi = (\phi(\vec{e}_1), \phi(\vec{e}_2), \phi(\vec{e}_3))$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

注：$\phi(\vec{e}_1) = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_4$

$\phi(\vec{e}_2) = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_3 + 2\vec{\varepsilon}_4$

$\phi(\vec{e}_3) = -\vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3 + \vec{\varepsilon}_4$

(3) $A_\phi \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $rank(A)=2$. 由对偶定理，$\dim(\ker\phi)=1$.

$\ker(\phi)$ 对应的齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

取 $x_3=1$，则 $x_2=-1$. $x_1=1$. 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker\phi$，于是 $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ 是 $\ker\phi$ 的一组基

又因为 A 的前两列线性无关，所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 是 $\mathrm{im}\phi$ 的一组基.

强调是 A 的列，不是变换后的列.
行

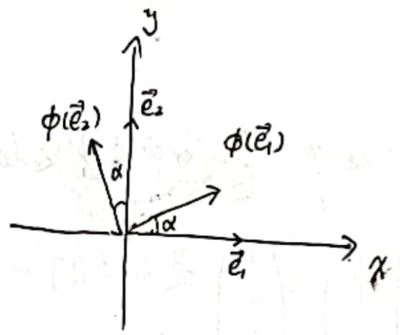
(4) $\dim(\mathrm{im}\phi) = rank(A) = 2$

$\dim(\ker\phi) = 3-2 = 1$

2. $$\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 2.}{\begin{pmatrix} -1\times2+1\times2 & -1\times3+1\times1 \\ -2\times2+3\times2 & -2\times3+3\times1 \\ 2\times2+(-1)\times2 & 2\times3+(-1)\times1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$\phi(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad \phi(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$



3. (i) 由 $\dim(V_A)=3$ 可知

$$\mathrm{rank}(A) = n-3 = 7-3 = 4. \quad (\text{对偶定理})$$

回顾：设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，再设 V_A 是 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间，则

$$\mathrm{rank}(A) + \dim(V_A) = n.$$

若 ϕ_A 是 A 对应的线性映射，则

$$\dim(\mathrm{im}(\phi)) + \dim(\ker(\phi)) = n.$$

若 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间，则

$$\dim(U) + \dim(V) = \dim(U+V) + \dim(U\cap V)$$

(2) 不可能，若 $dim(V_A)=1$，则

$$rank(A)=n-dim(V_A)=6>5.$$

但 5×7 的矩阵秩一定小于等于 5，矛盾。

$\square$

4. (1) 设 $\vec{y}_1,\vec{y}_2\in\mathbb{R}^m$，$\vec{x}_1=\phi^{-1}(y_1)$，$\vec{x}_2=\phi^{-1}(y_2)$，则对任意 $\alpha\in\mathbb{R}$，有

$$\phi^{-1}(\alpha\vec{y}_1)=\phi^{-1}(\alpha\phi(\vec{x}_1))=\phi^{-1}(\phi(\alpha\vec{x}_1))=\alpha\vec{x}_1=\alpha\phi^{-1}(\vec{y}_1)$$

$$\phi^{-1}(\vec{y}_1+\vec{y}_2)=\phi^{-1}(\phi(\vec{x}_1)+\phi(\vec{x}_2))=\phi^{-1}(\phi(\vec{x}_1+\vec{x}_2))=\vec{x}_1+\vec{x}_2=\phi^{-1}(\vec{y}_1)+\phi^{-1}(\vec{y}_2)$$

所以 ϕ 为线性映射。

(2) 设 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，则 $\phi(\vec{e}_1),\cdots,\phi(\vec{e}_n)\in\mathbb{R}^m$，下证 $\phi(\vec{e}_1),\cdots,\phi(\vec{e}_n)$ 线性无关。设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}$，

$$\alpha_1\phi(\vec{e}_1)+\cdots+\alpha_n\phi(\vec{e}_n)=\vec{0}$$

则

$$\phi(\alpha_1\vec{e}_1+\cdots+\alpha_n\vec{e}_n)=\vec{0}.$$

因为 ϕ 为单射，所以 $\alpha_1\vec{e}_1+\cdots+\alpha_n\vec{e}_n=0$，由 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 线性无关，得 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$。则 $\phi(\vec{e}_1),\cdots,\phi(\vec{e}_n)$ 线性无关，又因为

$$\{\phi(\vec{e}_1),\cdots,\phi(\vec{e}_n)\}\subset\mathbb{R}^m.$$

所以 $dim(\mathbb{R}^m)\geq n$，即 $m\geq n$，同理，对 ϕ^{-1} 进行分析，可知

$$n\geq m.$$

则 $n=m$。

$\square$

5. (1) $AB=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)\in\mathbb{R}^{1\times1}$

$$BA=\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_1 & \cdots & \alpha_n\beta_1\\ \vdots & & & \\ \alpha_1\beta_n & \alpha_2\beta_n & \cdots & \alpha_n\beta_n\end{pmatrix}$$

$$rank(A)=\begin{cases}1 & A\neq0,\\ 0 & A=0.\end{cases}\qquad rank(B)=\begin{cases}1, & B\neq0.\\ 0, & B=0.\end{cases}$$

(2) 方法1：设 $rank(A)=r$. 不妨设A的前r行线性无关，设

$$A=\begin{pmatrix}\vec{v}_1\\ \vdots\\ \vec{v}_r\\ \vec{v}_{r+1}\\ \vdots\\ \vec{v}_m\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{m\times n},\quad \vec{v}_i\in\mathbb{R}^{1\times n},\ i=1,\cdots,m.$$

因为 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_r$ 线性无关，$rank(A)=r$. 则 $V_r(A)=\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_r\rangle$，则 $\vec{v}_{r+1},\cdots,\vec{v}_m$ 可以被 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_r$ 线性表出，设

$$\vec{v}_i=\alpha_{i1}\vec{v}_1+\cdots+\alpha_{ir}\vec{v}_r,\quad i=r+1,\cdots,m.$$

则 A 可以通过初等行变换化为 $\begin{pmatrix}\vec{v}_1\\ \vdots\\ \vec{v}_r\\ \vec{0}\\ \vdots\\ \vec{0}\end{pmatrix}$，则存在可逆矩阵 $U\in\mathbb{R}^{m\times m}$.

使得 $UA=\begin{pmatrix}\vec{v}_1\\ \vdots\\ \vec{v}_r\\ \vec{0}\\ \vdots\\ \vec{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{0}\\ \vdots\\ \vec{0}\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vdots\\ \vec{v}_r\\ \vdots\\ \vec{0}\end{pmatrix}$，所以

$$A=U^{-1}\left(\begin{pmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{0}\\ \vdots\\ \vec{0}\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vdots\\ \vec{v}_r\\ \vdots\\ \vec{0}\end{pmatrix}\right)=U^{-1}\begin{pmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{0}\\ \vdots\\ \vec{0}\end{pmatrix}+\cdots+U^{-1}\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vdots\\ \vec{v}_r\\ \vdots\\ \vec{0}\end{pmatrix}$$

令 $B_i=U^{-1}\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vdots\\ \vec{v}_i\\ \vdots\\ \vec{0}\end{pmatrix}$, $i=1,\cdots,r$，则 $rank(B_i)=1$，且 $A=B_1+B_2+\cdots+B_r$.

方法2：前面还是一样，则

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_r \\ \vec{v}_{r+1} \\ \vdots \\ \vec{v}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_r \\ \alpha_{r+1,1}\vec{v}_1 + \alpha_{r+1,2}\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_{r+1,r}\vec{v}_r \\ \vdots \\ \alpha_{m,1}\vec{v}_1 + \alpha_{m,2}\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_{m,r}\vec{v}_r \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{0} \\ \alpha_{r+1,1}\vec{v}_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m,1}\vec{v}_1 \end{pmatrix}}_{B_1} + \cdots + \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{0} \\ \vec{v}_r \\ \alpha_{r+1,r}\vec{v}_r \\ \vdots \\ \alpha_{m,r}\vec{v}_r \end{pmatrix}}_{B_r}.$$

则 $A = B_1 + \cdots + B_r$, $rank(B_1) = \cdots = rank(B_r) = 1$.

反证，若 $A = B_1 + \cdots + B_{r-1}$, $rank(B_1) = \cdots = rank(B_r) = 1$，则

$$rank(A) \le rank(B_1) + rank(B_2 + \cdots + B_{r-1}) \quad (例 6.13)$$
$$\le \cdots \le rank(B_1) + \cdots + rank(B_{r-1}) = r-1, \text{ 矛盾}$$

□

答疑：1. 为什么有时用行变换有时用列变换？

① 解方程的时候用行变换。

② 行变换不改变列向量的线性相关性。

$A = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_n) \xrightarrow{行变换} (\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_n)$

取一部分。

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4) \xrightarrow{行变换} (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_4)$.

$rank((\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4)) = 3$

$\Leftrightarrow rank((\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_4)) =$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{行变换} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ 1 & 2 & & 4 & \end{matrix} \end{array} = B$$

B的1,2,4列线性无关 $\Leftrightarrow$ A的1,2,4列线性无关.

B的1,2,3列线性相关 $\Leftrightarrow$ A的1,2,3列线性相关.

③ 计算秩时可以用初等行变换也可以用初等列变换.

$v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$，$v_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\5\\4\end{pmatrix}$，扩充成$R^5$的基，相当于把 $\begin{pmatrix}1&1\\2&2\\3&3\\4&5\\5&4\end{pmatrix}$ 加上3列变成秩为5的矩阵.

$\begin{pmatrix}1&1\\2&2\\3&3\\4&5\\5&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}1&0\\2&0\\3&0\\4&1\\5&-1\end{pmatrix}$，取 $v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$v_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$v_5=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

则 $\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\2&1&0&2&0\\3&0&1&3&0\\4&0&0&5&0\\5&0&0&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\2&1&0&0&0\\3&0&1&0&0\\4&0&0&1&0\\5&0&0&-1&1\end{pmatrix}$，秩为5，所以$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4,\vec{v}_5$ 线性无关，为R^5的基.

2. 设 $U=\langle u_1,\cdots,u_r\rangle$，$V=\langle v_1,\cdots,v_s\rangle$，则 $U+V=?$

答：$U+V=\langle u_1,\cdots,u_r,v_1,\cdots,v_s\rangle$.（注：但$u_1,\cdots,u_r,v_1,\cdots,v_s$不一定是$U+V$的基，即使$\{u_i\}$是$U$的基，$\{v_i\}$是$V$的基）

因为 $U+V=\{\vec{u}+\vec{v}\mid \vec{u}\in U,\vec{v}\in V\}$.

$=\{(a_1\vec{u}_1+\cdots+a_r\vec{u}_r)+(b_1\vec{v}_1+\cdots+b_s\vec{v}_s)\mid a_i,b_j\in R,i=1,\cdots,r,j=1,\cdots,s\}$

$=\langle\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_r,\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_s\rangle$.