

第一周习题

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 是实数, 且多项式 $p(x) = ax^2 + bx + c$ 满足

$$p(\alpha_i) = \beta_i, i = 1, 2.$$

列出 $p(x)$ 的系数 a, b, c 满足的线性方程组以及该方程组对应的系数矩阵和增广矩阵.

2. 判断下列两个线性方程组是相容的还是不相容的; 如果相容, 判断是确定的还是不定的。(鼓励用矩阵语言写)

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y + 2z = 6 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} y + z = 4 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}.$$

3. 利用数学归纳法证明:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{和} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. 设下列实系数方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}. \quad (1)$$

有两组解:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n \end{cases}, \quad \text{和} \quad \begin{cases} x_1 = \beta_1 \\ x_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \beta_n \end{cases}.$$

证明: 对任意实数 c ,

$$\begin{cases} x_1 = c\alpha_1 \\ x_2 = c\alpha_2 \\ \vdots \\ x_n = c\alpha_n \end{cases}, \quad \text{和} \quad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n + \beta_n \end{cases}$$

也是方程组 (1) 的解.