

第三周习题

1. 设映射 $f: X \rightarrow Y$. T_1, T_2 是 Y 的两个子集, 证明:

(i) $f^{-1}(T_1 \cup T_2) = f^{-1}(T_1) \cup f^{-1}(T_2)$,

(ii) $f^{-1}(T_1 \cap T_2) = f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2)$.

2. 令 S, T 为两个非空的集合, 且 $|S| = m, |T| = n$. 问:

(i) S 到 T 可建立多少个映射?

(ii) S 到 T 可建立单射、双射的条件是什么? 各能建立多少个?

(iii) 设 $m = 3, n = 2$, 从 S 到 T 可以建立多少个满射?

3. 设 $f(x) = \sin x$, 且定义域为 \mathbb{R} .

(i) 任给 $y \in [-1, 1]$, 求 $f^{-1}(\{y\})$.

(ii) 求由 f 诱导的等价关系 \sim_f 的商集(等价关系: $x \sim_f x' \iff f(x) = f(x')$).

(iii) 刻画上述等价关系诱导的商映射 π 和自然投射 \bar{f} .

4. 柯斯特里金-第一卷第30页: 2, 3.

5. 设 $|$ 是 \mathbb{Z}^+ 上的整除关系, 即对 $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a|b$ 如果存在 $m \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $b = ma$. 验证:
 $|$ 是偏序, 并举例说明 $|$ 不是全序.