第五周习题

1. 计算线性组合 $2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3$, 其中

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

2. 判断下列 $\mathbf{v}_3$ 是否是 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 的线性组合.

   (i)
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

   (ii)
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3. 设
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 19 \\ 18 \\ 17 \end{pmatrix},$$
   验证: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 两两线性无关, 但是 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 线性相关.

4. 证明: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^n$ 线性无关当且仅当 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ 也线性无关.

5. 利用扩展欧几里得算法计算 60 和 35 的最大公因数和最小公倍数, 并计算整数 u, v 使得 $60u + 35v = \gcd(60, 35)$ 成立.

6. 设 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}^+$, 其中 $n \geq 3$. 再设 g 为它们的最大公因数。证明:

   (i) $g = \gcd(\gcd(a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)$.

   (ii) 存在 $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{Z}$, 使得 $u_1 a_1 + \cdots + u_n a_n = g$.