第六至七周习题

1. 设

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}^3$ 中的向量, 证明下述结论:

(i) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 线性无关.

(ii) $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, 并计算 $\mathbf{v}$ 在基 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的系数.

(iii) 将 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 扩充成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

2. 设 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 中的向量组 $\mathbf{v}_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,n})$, $i = 1, 2, \ldots, s$, 线性无关. 证明: 延伸后的向量组 $\mathbf{w}_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,n}, \alpha_{i,n+1}, \ldots, \alpha_{i,k})$, $i = 1, 2, \ldots, s$, 也线性无关.

3. 柯斯特利金-代数学引论(第一卷) 第 55 页:5.

4. 设 V_1, V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间, 证明: $V_1 + V_2$ 是直和当且仅当

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2).$$

5. 求下列矩阵的秩.

$$(1) \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. 柯斯特利金-代数学引论(第一卷) 第 55 页:3.