第九周习题

1. 定义映射

$$\begin{array}{cccc} \phi: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1-x_3 \\ x_2+x_3 \\ x_1+2x_2+x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

   (1) 证明: ϕ 是线性映射;

   (2) 计算 ϕ 在标准基下的矩阵;

   (3) 计算 $\ker(\phi)$ 的一组基和 $\operatorname{im}(\phi)$ 的一组基;

   (4) 计算 $\ker(\phi)$ 和 $\operatorname{im}(\phi)$ 的维数.

2. 计算下列矩阵之积.

$$(1)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

3. 设 $A \in \mathbb{R}^{5\times 7}$, 再设以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间为 V_A.

   (1) 如果 V_A 的基底由三个向量构成, 求 $\operatorname{rank}(A)$;

   (2) 请问 V_A 的维数可能是 1 吗?

4. 设 $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是线性双射. 证明:

   (1) ϕ^{-1} 是线性映射;

   (2) $n = m$.

5. 设 $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 和 $B = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^t$, 其中 $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

   (1) 计算 AB, BA, $\operatorname{rank}(A)$ 和 $\operatorname{rank}(B)$.

   (2) 证明: 任何一个秩为 r 的非零矩阵可以写成 r 个秩为 1 的矩阵之和, 但不能写成 $r-1$ 个秩为 1 的矩阵之和.