

第十周习题

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

计算: A^2, A^3 , 并对任意 $k \in \mathbb{Z}^+$, 求 A^k 的表达式.

2. (1) 设 $B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 证明: $(B + C)^t = B^t + C^t$.

(2) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 证明: 存在 $B, C \in M_n(\mathbb{R})$, 满足

$$A = B + C, \quad B^t = B, \quad \text{且} \quad C^t = -C.$$

(注: 即证明任意一个方阵都可以写成一个对称矩阵和一个斜对称矩阵的和.)

3. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 可逆. 证明:

(1) 如果 A 对称, 则 A^{-1} 也对称;

(2) 如果 A 斜对称, 则 A^{-1} 也斜对称.

4. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 证明:

(1) 若 $A^2 = O$, 则 $\text{rank}(A) \leq \frac{1}{2}n$.

(2) 若 $A^3 = O$, 则 $\text{rank}(A) \leq \frac{2}{3}n$.

(提示: 利用定理 6.24.)