第十一周习题

1. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&2\\0&2&1\end{pmatrix},$$

计算 A^{-1}.

2. 设 $M=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 和 $N=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 计算

$$\begin{pmatrix}M&O\\O&N\end{pmatrix}J \quad 和 \quad J\begin{pmatrix}M&O\\O&N\end{pmatrix}.$$

3. (矩阵的满秩分解) 设 $r>0$.

   (i) 证明:

$$\begin{pmatrix}E_r&O_{r\times(n-r)}\\O_{(m-r)\times r}&O_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r\\O_{(m-r)\times r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r&O_{r\times(n-r)}\end{pmatrix}.$$

   (ii) 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\operatorname{rank}(A)=r$. 证明: 存在$B\in\mathbb{R}^{m\times r}$, $C\in\mathbb{R}^{r\times n}$, 满足$A=BC$, 且 B 列满秩和 C 行满秩.

4. 设 $A\in\mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ 可逆, $D\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 且可逆, 证明 $X=\begin{pmatrix}A&B\\O&D\end{pmatrix}$ 可逆, 并求 X^{-1}.

5. 设 $A,B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, E_n+AB 可逆, 求证: E_n+BA 也可逆.

6. 设$A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

   (i) 证明: $\operatorname{tr}(AA^t)\geq 0$, 且 $\operatorname{tr}(AA^t)=0$ 当且仅当 $A=O$.

   (ii) (选作) 设 $X\in\mathrm{M}_{n+k}(\mathbb{R})$, $X=\begin{pmatrix}A&C\\O_{k\times n}&B\end{pmatrix}$, 其中 $B\in\mathrm{M}_k(\mathbb{R})$. 证明: 如果 $XX^t=X^tX$, 则 $C=O_{n\times k}$.