

第十二周习题

1. 用两种方法计算下面的行列式: $\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}.$$

3. 证明: $\begin{vmatrix} a_1+c_1 & b_1+a_1 & c_1+b_1 \\ a_2+c_2 & b_2+a_2 & c_2+b_2 \\ a_3+c_3 & b_3+a_3 & c_3+b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

4. 证明: 一个 n 阶矩阵 A 总可以通过第二类初等行和列变换的化为一个对角矩阵 $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ 且 $\det(A) = \det(A') = d_1 d_2 \cdots d_n$. (第二类初等变换: 某一行(列)乘以一个常数加到另一行(列))

5. 计算下述 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

6. (选做) 计算下述 n 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}, \quad \text{其中 } a \neq b.$$