

第十三周习题

1. 设 $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$, 令

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

证明: 如果 A 可逆且 $CA = AC$, 则 $|X| = |AD - CB|$.

(注: 实际上 A 可逆的条件可以去掉)

2. 求下列矩阵的伴随矩阵及其逆矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

并用克拉默法则求解方程

$$BX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 满足 $AA^t = E_n$, $|A| = -1$. 证明: $|E_n + A| = 0$.

4. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 证明伴随矩阵具有如下性质:

$$(\lambda A)^\vee = \lambda^{n-1} A^\vee; \quad (A^t)^\vee = (A^\vee)^t; \quad |A^\vee| = |A|^{n-1}.$$

5. (a) 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 且 A, B 可逆, 证明: $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$.

(b) (选做) 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 证明: $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$. (即(a)中可逆的条件实际可以去掉. 提示: 可考虑矩阵 $E_n + \epsilon A$, ϵ 充分小, 可参考2021-2022学年习题课十中何老师讲义).