第十四周习题

1. 设 p 为素数, 记 $\mathbb{Z}_p^\times = \mathbb{Z}_p \setminus \{\bar{0}\}$,

   (a) 证明: $(\mathbb{Z}_p^\times, \cdot, \bar{1})$ 构成一个群.

   (b) 设 $p = 5$, 计算 $\overline{3}, \overline{2}$ 关于运算$\cdot$ 的逆.

   (c) 列出 $(\mathbb{Z}_5^\times, \cdot, \bar{1})$ 和 $(\mathbb{Z}_5, +, \bar{0})$ 的乘法表.

   (d) 寻找某一个 $\overline{a} \in \mathbb{Z}_5^\times$, 使得$\left\{\overline{a}^i \mid i \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{Z}_5^\times$.

   (注: 关于同余运算的定义见第十三周讲义第四章1.2节)

2. 设
$$\begin{array}{cccc} \phi: & S_n & \to & \{1,-1\} \\ & \sigma & \mapsto & \epsilon_\sigma \end{array},$$
   其中 ϵ_σ 是置换 σ 的符号. 验证: ϕ 是从置换群 S_n 到群 $(\{1,-1\}, \cdot, 1)$ 的同态.

3. 设群中元素 a 的阶是 m, 元素 b 的阶是 n. 证明: 如果 $ab = ba$且 m, n 互素时, 则 ab 的阶为 mn.

4. 设 H, K 是群 G 的两个子群, 证明 HK 是 G 的子群当且仅当 $HK = KH$.

   (注: 设 A, B 是 G 的两个非空子集, 定义 $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.)

5. 设 G, H 为两个群, 单位元分别为 e_G, e_H, 设 $\phi : G \to H$ 为群同态, 记
$$\ker(\phi) = \{g \in G \mid \phi(g) = e_H\}.$$
   证明:

   (a) $\ker(\phi)$ 为 G 的一个子群;

   (b) $g\ker(\phi) = \ker(\phi)g$ 对任意 $g \in G$ 成立, 其中
$$g\ker(\phi) = \{gg' \mid g' \in \ker(\phi)\}, \ \ker(\phi)g = \{g'g \mid g' \in \ker(\phi)\}.$$

   (c) ϕ 是单射当且仅当 $\ker(\phi) = \{e_G\}$.

6. 设 $(G, \cdot, 1)$ 是一个群且 $\mathrm{card}(G) = p$, p 为素数. 证明: 任意 $g \in G \setminus \{1\}$, 有$\langle g\rangle = G$.