第十五周习题

1. (a) 写出 $G=(\mathbb{Z}_{12},+,0)$ 的所有生成元.

   (b) 设 G 为循环群且$\mathrm{card}(G)=+\infty$, 证明: G 只有两个生成元.

   (c) 设 $G=\langle a\rangle$ 为有限阶循环群且 $n=\mathrm{card}(G)$. 证明: a^k 是G 的生成元当且仅当 $\gcd(n,k)=1$.

2. (a) 写出 $(\mathbb{Z}_{12},+,0)$ 的所有子群;

   (b) 证明: 当 $G=\langle a\rangle$ 为 n 阶循环群时, 对于每个 n 的正因子 k (即$k\mid n$, $k>0$), G 有且只有一个 k 阶子群, 且这个子群就是$\langle a^{\frac{n}{k}}\rangle$.

3. 设 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}:a,b\in\mathbb{Z}\}$. 验证 $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,0,\cdot,1)$ 是 $(\mathbb{R},+,0,\cdot,1)$ 的子环. 确定该子环中所有可逆元.

4. 环 R 的非零元素 x 称为幂零的, 若存在 $n\in\mathbb{Z}^+$, 使得 $x^n=0$. 证明:

   (a) 如果 x 是幂零元, 则 $1-x$ 是可逆元;

   (b) 环 $\mathbb{Z}_m$ 包含幂零元当且仅当 m 可以被一个大于 1 的整数的平方整除.

5. 设 F 是一个域,

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_4(F)$$

   根据 F 的特征,

   (a) 讨论 $\mathrm{rank}(A)$ 的取值;

   (b) 设$\phi_A:F^4\to F^4$ 是以A 为矩阵的线性映射, 计算 $\ker(\phi_A)$ 和 $\mathrm{im}(\phi_A)$ 的基底.

6. (选做)

   (a) 偶数阶群必含有 2 阶元.

   (b) 若群 G 的阶为 $2n$, n 为奇数, 则存在阶为 n 的子群. (提示: 需要 G 嵌入 S_{2n}, 再运用 (a) 以及奇置换偶置换的性质)