第十六周习题

1. 设

$$A=\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{2} & \overline{0}\\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1}\\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{2}\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_3(\mathbb{Z}_3).$$

计算以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间 V_A 的一组基, 并计算 V_A 中非零向量的个数.

2. 设 ϕ 是域 F 到域 K 的环同态, 证明: ϕ 为单射.

3. 设 $f(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)\in\mathbb{Z}[X]$ 分别求

   (a) $f(2)\in\mathbb{Z}$;

   (b) $f(\bar{5})$, 其中 $\bar{5}\in\mathbb{Z}_7$;

   (c) $f(A)$, 其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

4. 多项式 $f(X)=X^5+3X^4+X^3+4X^2-3X-1, g(X)=X^2+X+1$ 可以看作环 $\mathbb{Z}[X]$ 中的多项式或者 $\mathbb{Z}_5[X]$ 中的多项式. 用带余除法, 证明在第一种情况下 $f(X)$ 不被 $g(X)$ 整除, 并计算 $\mathrm{quo}(f,g,X),\mathrm{rem}(f,g,X)$; 而在第二种情况下, $f(X)$ 可以被 $g(X)$ 整除. 与此相反的情况可能出现吗?

5. 设 F 是域

   (a) 设 $a,b\in F$ 且 $a\neq 0$. 证明: 映射

$$\begin{aligned}\phi_{a,b}: F[x] &\longrightarrow F[x]\\ p(x) &\longmapsto p(ax+b)\end{aligned}$$

   是从 $F[x]$ 到 $F[x]$ 的环同构.

   (b) 设 $\sigma: F[x]\longrightarrow F[x]$ 是环同构且 $\sigma|_F=\mathrm{id}_F$. 证明: 存在 $a,b\in F$ 且 $a\neq 0$ 使得 $\sigma=\phi_{a,b}$.