

第一周习题

1. 设 $p = (x - y)(x - z) + 3x^2y^2z^2 - x^3 - 2 \in \mathbb{Z}[x, y, z]$.

(i) 计算 p 的齐次分解.

(ii) 计算 $\deg_x(p), \deg_y(p), \deg_z(p)$ 和 $\deg(p)$.

2. 求 $\mathbb{Q}[x]$ 中次数小于 3 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(0) = 2, f(1) = 1, f(3) = 0$.

3. 设

$$\epsilon_1 = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}, \quad \epsilon_i = \epsilon_1^i \quad i = 0, \dots, n-1.$$

验证:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \epsilon_0 & \epsilon_1 & \cdots & \epsilon_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \epsilon_0^{n-1} & \epsilon_1^{n-1} & \cdots & \epsilon_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \epsilon_0^{-1} & \epsilon_1^{-1} & \cdots & \epsilon_{n-1}^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \epsilon_0^{-(n-1)} & \epsilon_1^{-(n-1)} & \cdots & \epsilon_{n-1}^{-(n-1)} \end{pmatrix}.$$

4. 设 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, 证明: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. 并说明其几何意义.

5. 设 $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. 若 $\alpha = a/b$ 为其根, 其中 $a, b \in \mathbb{Z}$ 且 $\gcd(a, b) = 1$. 证明: $a|a_0, b|a_n$.

6. 设 F 是域, $A \in M_n(F)$ 满足 $A^2 = A$. 证明: $\text{rank}(A) + \text{rank}(A - E) = n$.