

第二周习题

1. 已知多项式 $x^3 - 7x + \lambda \in \mathbb{C}[x]$ 有两个根的比值是 2, 求 λ .
2. 设 D 是UFD, $a, b_1, \dots, b_n \in D^*$. 证明: 如果 $\gcd(a, b_i) = 1, i = 1, \dots, n$, 则

$$\gcd(a, b_1 \cdots b_n) = 1.$$

3. 判断整系数多项式: $x^2 + 4, x^3 + 4, x^4 + 4$ 和 $x^5 + x^3 + 2x + 1$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中是否不可约.
4. 已知 $f(x) = x^p - x - 1$ 在 $\mathbb{Z}_p[x]$ 中不可约, 其中 p 为素数. 证明: $f(x) = x^p - x - 1$ 与 $g(x) = x^p + (p-1)x + p-1$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约.

提示: 利用环同态

$$\begin{aligned} \phi_p: \quad \mathbb{Z}[x] &\longrightarrow \mathbb{Z}_p[x] \\ \sum_i a_i x^i &\mapsto \sum_i \bar{a}_i x^i. \end{aligned}$$

5. (选做) 柯斯特利金-代数学引论(第一卷)第 162 页: 4.