# 第三周习题

1. 设 $F$ 是域.

   (i) 令 $V = \{A \in \mathrm{M}_n(F) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$. 验证 $V$ 是 $\mathrm{M}_n(F)$ 的子空间.

   (ii) 设 $p \in F[x] \setminus \{0\}$. 验证 $W = \{f \in F[x] \mid p|f\}$ 是 $F[x]$ 的子空间.

2. 在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 中, 用 $V_1, V_2$ 分别表示偶函数和奇函数组成的集合, 证明：

   (i) $V_1, V_2$ 都是 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 的子空间;

   (ii) $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = V_1 \bigoplus V_2$.

3. (i) 设 $f_1, f_2, \ldots, f_n \in F[x] \setminus \{0\}$, 且它们的次数两两不同. 证明: $f_1, \ldots, f_n$ 在 $F$ 上线性无关.

   (ii) 设 $e^{ax} \sin bx$, $e^{ax} \cos bx \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 中, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$. 根据 $a, b$ 的取值讨论这两个函数在 $\mathbb{R}$ 上是否线性相关.

4. 设

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ & f(x) & \mapsto & f'(x) \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ & f(x) & \mapsto & xf(x). \end{array}$$

   验证 $\phi$ 和 $\psi$ 都是线性映射. 对任意的 $f \in \mathbb{R}[x]$, 计算 $(\phi \circ \psi - \psi \circ \phi)(f)$.

5. 设 $W$ 是域 $F$ 上的线性空间,$W_1, \ldots, W_k$ 是其子空间, 且

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

   再设 $B_i \subset W_i$ 是线性无关集, 其中 $i = 1, 2, \ldots, k$. 证明: $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ 仍是线性无关集.

6. (选做) 设域 $F$ 的特征为 0.

   (i) 设 $V_1, V_2$ 是域 $F$ 上的线性空间 $V$ 的两个真子空间. 证明: 在 $V$ 中存在 $\mathbf{v}$, 使得 $\mathbf{v} \notin V_1, \mathbf{v} \notin V_2$ 同时成立.

   (ii) 证明: $F$ 上的线性空间不能表示成有限个真子空间的并.