第十周习题

记号:在本次作业中, V 是域 F 上的线性空间.

1. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}^2 = 2\mathcal{A} - \mathcal{E}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

且 $f = t^2 - 2 \in F[t]$.

   (i) 计算 $\alpha, \beta \in F$ 使得 $f(\mathcal{A}) = \alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{E}$;

   (ii) 计算 $f(B)$ 和 μ_B.

2. 设

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}_{4\times 4},\ B = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & E_2 \end{pmatrix}_{4\times 4},\ C = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{4\times 4}.$$

计算 μ_A, μ_B 和 μ_C.

3. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 证明: 如果 A 或者 B 可逆, 则 $AB \sim_s BA$. 举例说明当 A, B 都不可逆时, 上述结论不一定成立.

4. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 证明: 如果 $V_1, \cdots, V_m$ 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, 那么这些子空间的和与交都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

5. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$. 证明：如果 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, 那么对任意的 $\lambda \in K$, $\ker(\lambda\mathcal{E} - \mathcal{A})$ 是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间.

6. (选做) 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 且正定. 证明: AB 相似于一个正定矩阵.