第四周习题

1. 设 $\mathbb{Q}^3$ 中的三个向量

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (i) 计算 $V := \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ 的一组基 和 $\mathbb{Q}^3/V$ 的维数.

   (ii) 令 $\mathbf{w} = (3,2,2)^t$, 判断 $\mathbf{w}$ 是否为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 的线性组合? 若是, 请写出这个线性组合.

2. 设 U 是域 F 上 n 阶斜对称矩阵构成的线性空间. 计算 $\dim_F(U)$.

   (提示: 分 $\mathrm{char}(F) \neq 2$ 和 $\mathrm{char}(F) = 2$ 两种情形)

3. 设 P_n 是 $\mathbb{R}[x]$ 中次数不超过 $n-1$ 的多项式全体组成的线性空间. 定义

$$\begin{array}{rccc} \phi: & P_n & \longrightarrow & P_n \\ & u(x) & \longmapsto & xu'(x) - u(x), \end{array}$$

   证明: ϕ 是线性映射，并求其核空间的一组基.

4. 把复数域 $\mathbb{C}$ 看成有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间. 设

$$U = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\} \quad 和 \quad V = \{a + b\sqrt{-1} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

   验证 U 和 V 是 $\mathbb{C}$ 的子空间, 并计算 $\dim_{\mathbb{Q}}(U+V)$.

5. 设 V 是域 F 上的有限维线性空间, W 是 V 的子空间. 证明: 存在 $\phi \in \mathrm{Hom}(V,V)$ 使得 $W = \ker(\phi)$.

6. (选做) 设 V 是域 F 上的线性空间, $V_1, \ldots, V_k$ 是其子空间, 且 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$. 对 $i \in \{1, \ldots, k\}$, 定义映射

$$\begin{array}{rccc} \sigma_i: & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x}_i, \end{array}$$

   其中 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_i \in V_i$.

   (i) 验证: 每个 σ_i 都是良定义的线性映射(称为从 V 到 V_i 关于上述直和的投影).

   (ii) 证明: (a) $\forall\, i \in \{1, \ldots k\}$, $\sigma_i^2 = \sigma_i$ (等方性); (b) $\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ 且 $i \neq j$, $\sigma_i \circ \sigma_j = \mathcal{O}$ (正交性); (c) $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_k = \mathcal{E}$ (完全性).

   (提示: 参见科斯特利金第二卷第三节第一部分, pages 57–58).