第五周习题

1. 设 $\mathbb{R}^2$ 中的两组基底

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (i) 求 $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 使得 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)P$.

   (ii) 设 $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. 计算 $\mathbf{w}$ 在上述两组基下的坐标.

2. 设 $V = \mathbb{R}[x]^{(n)}$. 对 $i = 0, 1, \ldots, n$, 定义:

$$\begin{array}{rccc} \psi_i: & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \frac{1}{i!}\frac{d^i f}{dx^i}(0) \end{array}.$$

   验证 $\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}$ 是 $1, x, \ldots, x^{n-1}$ 的对偶基.

3. 设 $\mathbb{R}^4$ 上的双线性型由公式 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - 3x_2y_3 + 2x_4y_1 + 5x_3y_2 - x_4y_4$ 定义, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^t$. 求 f 在标准基下的矩阵和 $\mathrm{rank}(f)$.

4. 设 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times m}$, 其中 F 是域. 证明:

$$m - \mathrm{rank}(E_m - AB) = n - \mathrm{rank}(E_n - BA).$$

5. 设 F 是域, V 是域 F 上的 n 维线性空间, V^* 是 V 的对偶空间.

   (i) 设 $f \in V^*$ 且非零. 证明: $\dim(\ker(f)) = n - 1$.

   (ii) 设 $f, g \in V^*$ 且 $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})$. 证明: h 是 F^n 上的双线性型, 并计算 $\mathrm{rank}(h)$.

   (iii) (选做) 设 h 是 F^n 上的双线性型. 证明: 如果 $\mathrm{rank}(h) = 1$, 则存在 $f, g \in V^*$, 使得对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})$.