第六周习题

记号: 在本次作业中, F 代表域.

1. 设
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
计算 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ 和对角矩阵 B 使得 $P^t A P = B$.

2. 设 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上二次型. 计算 q 在标准基下的矩阵, 以及一组规范基和在该基下的规范型.

3. 设 $A \in \mathrm{GL}_n(F)$ 和 $B \in \mathrm{M}_n(F)$. 证明: 如果 $A \sim_c B$, 则 $B \in \mathrm{GL}_n(F)$ 且 $A^{-1} \sim_c B^{-1}$.

4. 设
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathrm{M}_2(F) \times \mathrm{M}_2(F) & \longrightarrow & F \\ & (A, B) & \mapsto & \mathrm{tr}(AB^t) \end{array}$$
   (i) 验证 f 是 $\mathrm{M}_2(F)$ 上的对称双线性型;
   (ii) 求 f 在基底 $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$ 下的矩阵, 并求 $\mathrm{rank}(f)$.

5. (选做) 设 V 是 F 上的 n 维向量空间, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是 V 上非退化双线性型(非退化双线性型是指双线性型满足 $\mathrm{rank}(f) = n$). 证明**:**
$$\begin{array}{rccc} \phi: & V & \longrightarrow & V^* \\ & \mathbf{v} & \mapsto & f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \end{array}$$
是线性同构, 其中 $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ 是指映射:
$$\begin{array}{rccc} \ell_{\mathbf{v}}: & V & \longrightarrow & F \\ & \mathbf{x} & \mapsto & f(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{array}$$