

## 第七周习题

1. 设  $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3$  是  $\mathbb{R}^3$  上的二次型, 计算  $q$  的签名.

2. 设

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SM}_2(\mathbb{R}).$$

(i) 是否存在  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ , 使得  $S = P^t P$ ? 如果存在, 计算一个这样的矩阵  $P$ .

(ii) 是否存在  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ , 使得  $S = P^t P$ ? 如果存在, 计算一个这样的矩阵  $P$ .

3. 设

$$\begin{aligned} q: M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \text{tr}(XX^t). \end{aligned}$$

证明:  $q$  是  $M_n(\mathbb{R})$  上的二次型并求  $q$  的签名.

4. 设  $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$  且  $\det(A) < 0$ . 证明: 存在  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  使得  $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} < 0$ .

5. 设  $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$  正定. 证明: 对于任意  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $A^m$  正定.

6. 设  $V$  是  $n$  维实空间,  $f_1, \dots, f_{s+t} \in V^*$ . 设

$$q = f_1^2 + \dots + f_s^2 - f_{s+1}^2 - \dots - f_{s+t}^2.$$

(i) 证明:  $q$  是二次型;

(ii) (选做) 再分别设  $k$  和  $\ell$  是  $q$  的正惯性指数和负惯性指数. 证明:  $k \leq s$  和  $\ell \leq t$ .