

## 第八周习题

1. 举例说明:

- (i) 正定矩阵  $(a_{i,j})$  可以在某些  $(i,j)$  处的值  $a_{i,j}$  是负的;
- (ii) 实对称矩阵  $A = (a_{i,j})$  所有的值都是正的, 但  $A$  可以不是正定的.

2. 实二次型

$$\lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

在  $\lambda$  取什么值时是负定的.

3. 设  $B \in \text{SM}_{n-1}(\mathbb{R})$  正定,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ , 且  $a \in \mathbb{R}$ . 令

$$A = \begin{pmatrix} B & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a \end{pmatrix},$$

证明: 如果  $\det(A) = 0$ , 则  $A$  半正定.

- 4. 设  $q = (x_1 + x_2)^2 + 3(x_1 - x_3)^2 + 2(2x_1 + x_2 - x_3)^2 + 5(3x_1 + x_2 - 2x_3)^2$  是  $\mathbb{R}^3$  上的二次型. 求  $q$  的签名.
- 5. 设  $A$  是实对称矩阵,  $E$  是同阶单位矩阵,  $\epsilon$  是充分小的实数. 证明: 方阵  $E + \epsilon A$  是正定的.