

第九周习题

记号:在本次作业中, V 是域 F 上的线性空间.

1. 设 V 的一组基是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, W 的一组基是 ϵ_1, ϵ_2 . 线性映射 ϕ 由

$$\phi(\mathbf{e}_1) = \epsilon_1 - \epsilon_2, \quad \phi(\mathbf{e}_2) = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \phi(\mathbf{e}_3) = \epsilon_2 - 2\epsilon_1.$$

确定.

- (i) 计算 ϕ 在上述基底下的矩阵;
(ii) 计算 $\text{rank}(\phi)$ 和 $\ker(\phi)$ 的一组基;
(iii) 设 $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1$; $\mathbf{w}_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2$, $\mathbf{w}_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2$. 证明:
 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是 V 的一组基, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是 W 的一组基. 并计算 ϕ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3; \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 下的矩阵.

2. 设 $C \in \text{GL}_n(F)$, $\mathcal{A}: M_n(F) \rightarrow M_n(F)$ 由公式 $\mathcal{A}(X) = C^{-1}XC$ 给出.

- (i) 验证 \mathcal{A} 是 $M_n(F)$ 上的线性算子.
(ii) 验证对任意 $X, Y \in M_n(F)$, $\mathcal{A}(XY) = \mathcal{A}(X)\mathcal{A}(Y)$.
(iii) 求 $\text{rank}(\mathcal{A})$.

3. 设 $A, B \in M_n(F)$ 且 $A \sim_s B$.

- (i) 证明: A 幂零 $\implies B$ 幂零; A 幂等 $\implies B$ 幂等.
(ii) 举例说明 A 对称不能推出 B 一定对称.

4. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A} = \mathcal{A}^3$. 证明:

$$\ker(\mathcal{A}) + \text{im}(\mathcal{A}) = V.$$

5. (选做) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$. 证明:

- (i) $\text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathcal{B}\mathcal{A}) + \dim(\text{im}(\mathcal{A}) \cap \ker(\mathcal{B}))$.
(ii) 对任意 $i \in \mathbb{Z}^+$, $\dim(\text{im}(\mathcal{A}^{i-1}) \cap \ker(\mathcal{A})) = \dim(\ker(\mathcal{A}^i)) - \dim(\ker(\mathcal{A}^{i-1}))$.