第十一和十二周习题

约定. 在下述习题中 F 是域, V 是 F 上的有限维线性空间.

1. 求实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

的所有实特征根和对应的特征向量.

2. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 可逆. 证明:

   (a) $\mathbf{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量当且仅当 $\mathbf{v}$ 是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的特征向量;

   (b) $\lambda \in F$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征根当且仅当 λ^{-1} 是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的特征根.

3. 设矩阵 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$ 且 A 与 B 相似.

   (a) 证明: $\mathrm{spec}_F(A) = \mathrm{spec}_F(B)$ 且对任意 $\lambda \in \mathrm{spec}_F(A)$, $\dim V_A^\lambda = \dim V_B^\lambda$, 其中 V_A^λ, V_B^λ 分别表示矩阵 A, B 关于 λ 的特征子空间.

   (b) 设 $B = P^{-1}AP$, 其中 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$, $\mathbf{v}$ 是 A 的特征向量. 证明: $P^{-1}\mathbf{v}$ 是 B 的特征向量.

4. 设有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 是否可以对角化? 如果可以, 求可逆矩阵 $P \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$ 使得 $P^{-1}AP$ 是对角阵.

5. 设 $n > 1$ 且 $T = \begin{pmatrix} a & * & \cdots & * \\ 0 & a & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(F)$ 不是对角矩阵. 证明: T 不能对角化.

6. (选做) 设:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

证明: A 可对角化. (提示: 参考本学期第一周讲义例 3.13)