第十三周习题

约定. 在下述习题中 F 是域, V 是 F 上的有限维线性空间.

1. 设
$$\mathcal{D}:\ \mathbb{R}[x]^{(3)} \longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(3)}$$
$$f(x) \mapsto f'(x).$$
求线性算子 $x\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^2+2\mathcal{D}+\mathcal{E}$ 和 $x^2\mathcal{D}^3+\mathcal{D}$ 的所有特征根和特征向量, 并说明这三个线性算子中哪些是可对角化的, 哪些不是.

2. 设
$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$
把 A^n 表示为一个二阶矩阵, 其中 n 是任意正整数.

3. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ 在标准基下的矩阵是
$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$
设 $\mathbf{v}=(1,0,1)^t$ 和 $\mathbf{w}=(1,0,0)^t$.
   (i) 计算 $\dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{v})$ 和 $\dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w})$;
   (ii) 判断 $\mathbb{R}^3$ 是不是 $\mathcal{A}$-循环的, 并说明理由.

4. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 且 V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 再设 $U_1,U_2\subset V$ 是 $\mathcal{A}$-子空间满足
$$V=U_1\oplus U_2.$$
证明: U_1 和 U_2 都是 $\mathcal{A}$-循环子空间.

5. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 可对角化, U 是非零的 $\mathcal{A}$-子空间. 证明: 限制算子 $\mathcal{A}_U$ 也可对角化.

6. (选做) 设 $A,B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 且 $AB=BA$. 证明:
   (i) A 和 B 有公共的特征向量;
   (ii) 存在 $P\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 同时为上三角矩阵.