

第十四周习题

约定. 在下述习题中 F 是域, V 是 F 上的有限维线性空间.

1. 设二阶复矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

计算 J_A, J_B 和 J_C .

2. 计算下列二阶复矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准型(提示: 需要对 λ_1, λ_2 的取值分情况讨论).

3. 设 A 是复数域上的方阵.

(a) 已知 $\chi_A(t) = (t-3)^4(t+2)$ 且 $\text{rank}(A-3E) = 2$. 求 J_A ;

(b) 在 $\text{rank}(A-3E) = 1, 3, 4$ 的情形, 能唯一地求出 J_A 吗?

4. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 证明: $\text{tr}(A^k) = 0, k = 1, 2, \dots, n$ 当且仅当 A 是幂零的.

5. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 可对角化. 证明: 如果 $\text{tr}(A^k) = 0, k = 1, 2, \dots, n$, 则 $A = 0$.