

## 第十五周习题

1. 设  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) 验证矩阵  $A$  和  $B$  有相同的特征多项式;
- (b) 求出它们的极小多项式;
- (c) 计算它们的初等因子组;
- (d) 求出它们的 Jordan 标准型.

2. 设幂零矩阵  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  满足  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$  且  $\mu_A = \mu_B$ .

- (a) 证明: 当  $n = 4$  时,  $A \sim_s B$ .
- (b) 当  $n = 5$  时,  $A \sim_s B$  是否成立? 并说明你的结论.

3. 计算  $J_n(\lambda)$  的极小多项式, 特征多项式和  $J_n(\lambda)^k$ , 其中  $k \in \mathbb{N}$ .

4. 设  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . 证明:  $\lambda$  是  $A$  的特征值当且仅当  $\lambda^k$  是  $A^k$  的特征值, 其中  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

5. 证明:  $J_n(1) \sim_s J_n(1)^k$ , 其中  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

6. (选作) 设  $\mathcal{A}$  是域  $F$  上  $n$  维线性空间上的线性算子. 证明: 如果  $\mathcal{A}$  有  $d$  维不变子空间, 则它有  $(n - d)$  维不变子空间. (提示: 利用方阵与其转置相似)