第十六周习题

1. 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. 证明:

   (a) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$.

   (b) 如果 $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$, 则 $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \perp (\mathbf{u}-\mathbf{v})$.

   (c) $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \frac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$.

2. 设 $V = \mathbb{R}[x]^{(3)}$ 是欧式空间, 其中 $\mathbb{R}[x]^{(3)} = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) < 3\}$, 内积定义为

$$(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

   (a) 计算 x 的长度和从 1 到 x^2 的距离.

   (b) 计算 V 的一组单位正交基.

3. 设 W 是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   在 $\mathbb{R}^4$ 中的解空间. 求 $W^\perp$ 的一组单位正交基.

4. (a) 设 U_1, U_2 都是 V 的子空间, 且 $U_1 \subseteq U_2$. 证明: $U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$;

   (b) 设 U_1, U_2 是 V 的子空间. 证明: $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

5. 设 $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 是所有 n 阶正交矩阵关于乘法构成的群.

   (a) 令 $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det(P) = 1\}$. 证明: $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 的子群 (称为特殊正交矩阵群).

   (b) 设 $T \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 是上三角的. 证明: T 是对角的.

6. (选做) 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in V$. 证明下列断言等价:

   (a) $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基;

   (b) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, (\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)(\mathbf{y}|\mathbf{e}_i)$;

   (c) 对任意 $\mathbf{x} \in V, \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)^2$.