

第十七周习题

1. 设对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) 计算正交矩阵 P 和对角矩阵 B 使得 $P^t A P = B$;

(b) 计算 $A^k, k \in \mathbb{N}^+$.

2. 设 V 是一个有限维向量空间, $(\cdot | \cdot)$ 为其上内积, η 为 V 中的一个单位向量, 定义 V 中一个线性映射如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: V &\rightarrow V \\ x &\mapsto x - 2(x|\eta)\eta. \end{aligned}$$

(称这样的映射 $\mathcal{A}$ 为一个镜面反射) 证明:

(a) $\mathcal{A}$ 是正交变换; (b) $\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$; (c) $\det(\mathcal{A}) = -1$.

3. (a) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 为正定矩阵. 证明: $A + A^{-1} - 2E_n$ 为半正定矩阵, 并指出什么时候 $A + A^{-1} - 2E_n$ 正定.

(b) 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A 正定, B 半正定且非零. 证明: $\det(A+B) > \max(\det(A), \det(B))$.

(c) 设 $A, B \in O_n(\mathbb{R})$, $\det(A) + \det(B) = 0$. 证明: $A + B$ 不可逆.

4. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $r = \text{rank}(A)$.

(a) 证明: 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的标准正交基 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, 使得

$$A^t A(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, r, \lambda_i = 0, i = r+1, \dots, n$.

(b) 设 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, i = 1, \dots, r$. 令 $\vec{u}_i = \frac{A\vec{v}_i}{\sigma_i} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, i = 1, \dots, r$. 证明: $(\vec{u}_1)^t, \dots, (\vec{u}_r)^t$ 两两正交且长度为 1.

(c) 证明: $A\vec{v}_i = 0, i = r+1, \dots, n$.

(d) (选做, 奇异值分解) 证明存在 $U \in O_m(\mathbb{R})$ 和正交矩阵 $V \in O_n(\mathbb{R})$, 使得

$$A = U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} V^t.$$