

§2.5 = 行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$$

命题：设实系数线性方程组

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

是确定的 $\Leftrightarrow \underline{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \neq 0$

determinant

此时 解为

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

证：设方程组确定
a, c 不全为零不妨设 $a \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - a^{-1}cr_1} \left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ 0 & \underline{d - a^{-1}cb} & \underline{f - a^{-1}ce} \end{array} \right)$$

$$a(d - a^{-1}cb) = ad - cb = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$\therefore$ 方程组确定 $\therefore d - a^{-1}cb \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

设 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. 则 a, c 不全为 0

不妨设 $a \neq 0$ 乘上逆矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & e \\ 0 & \underbrace{d - a^{-1}cb}_{\neq 0} & f - a^{-1}be \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 方程组确定

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

是良定义的. 直接代入发现

是方程组的解.

§3 集合

集合: 是指一些(有限或无限)具有共同性质的个体的总会

$$S = \{1, 2, 3\}$$

$$S = \{x \mid x \text{ 是小于 } 4 \text{ 的正整数}\}$$

集合中的个体 称为该集合元素。

$$1 \in S \quad 4 \notin S$$

$\mathbb{Z}^+$ 正整数集 $\mathbb{N}$ 非负整数集 $\mathbb{Z}$ 整数集 $\mathbb{Q}$ 有理数集 $\mathbb{R}$ 实数集 $\mathbb{C}$ 复数集

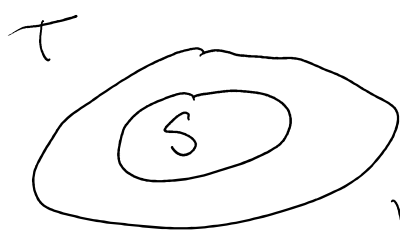
不含任何元素的集合称为空集
记做 $\emptyset$.

子集. 设 S, T 是两个集合

如果, S 中的元素都是 T 中的元素

则称 S 是 T 的子集

记为 $S \subset T$



当 $S \subset T$ 且 $S \neq T$

时 S 称为 T 的真子集

记为 $S \subsetneq T$

例

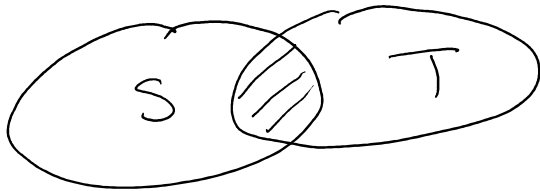
$$\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad \begin{matrix} \xleftarrow{0} \\ \xrightarrow{ax=b} \end{matrix}$$

..... (复数)

$\hookrightarrow$ God made the integers (正整数)
 All else is the work of man.

设 S 和 T 是两个集合
 由 S 和 T 中元素组成的集合
 称为 S 和 T 并 (union)
 记为 $S \cup T$
 $\hookrightarrow \text{cap}$

S 和 T 公共元素组成的集合
 称为 S 和 T 交 (intersection)
 记为 $S \cap T$
 $\hookrightarrow \text{cap}$



符号. 设 Λ 是一个指标集
 每个 $\lambda \in \Lambda$. 对应一个集合 S_λ

可定义 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \underline{S_\lambda}$

和 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \underline{S_\lambda}$

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda := \{x \mid \exists \lambda \in \Lambda, x \in S_\lambda\}$$

$\hookrightarrow$ 至少一个

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda := \{x \mid \forall \lambda \in \Lambda, x \in S_\lambda\}$$

$\hookrightarrow$ 任意一个

例

$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$T = \{0, 3, 5\}$$

$$S \cup T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$S \cap T = \{3\}$$

例 设 $\mathbb{R}^+$ 是所有正实数的集合

$$x \in \mathbb{R}^+ \quad T_x = [x-1, x+1]$$

$$\bigcup_{x \in \mathbb{R}^+} T_x = (-1, +\infty)$$

$$\bigcap_{x \in \mathbb{R}^+} T_x = \emptyset$$

引理 设 S 是集合且

$\forall \lambda \in \Lambda, U_\lambda$ 是集合

(i) ~~若~~ $\forall \lambda \in \Lambda, U_\lambda \subset S$
则 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \subset S$.

(ii) ~~若~~ $\forall \lambda \in \Lambda, S \subset U_\lambda$
则 $S \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

证法: (routine verification)

(i) 设 $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. 则
 $\exists \lambda_0 \in \Lambda$. 使得 $x \in U_{\lambda_0}$

$\therefore U_{\lambda_0} \subset S$

$\therefore x \in S$

于是 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \subset S$.

(ii) 自己证.

命题 (分配律) 设 Λ 是指标集
每个 λ 对应一个集合 S_λ . 再设 T
是集合 则

$$(i) \quad T \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \right) \\ = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (T \cap S_\lambda)$$

$$\lambda \in \Lambda$$

$$(ii) \quad T \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_{\lambda} \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (T \cup S_{\lambda})$$

证: (ii) 设 $x \in T \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_{\lambda} \right)$

则 $x \in T$ 或者 $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_{\lambda}$

如若 $x \in T$, 则 $x \in T \cup S_{\lambda}$
(对任意 $\lambda \in \Lambda$)

故 $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (T \cup S_{\lambda})$

如若 $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_{\lambda}$, 则

$\forall \lambda \in \Lambda, x \in S_{\lambda}$

于是 $x \in T \cup S_{\lambda}$

由此可知 $T \cup \bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_{\lambda} \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (T \cup S_{\lambda})$

反之, 设 $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (T \cup S_{\lambda})$

则, $\forall \lambda \in \Lambda$

$x \in T \cup S_{\lambda}$

如若 $x \in T$, 则 $x \in T \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_{\lambda} \right)$

如若 $x \notin T$, 则 $x \in S_{\lambda}$, 对任意
 $\lambda \in \Lambda$ 成立. 故 $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_{\lambda}$

、 $\sim - T \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_{\lambda} \right)$

$$\Rightarrow x \in T \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \right)$$

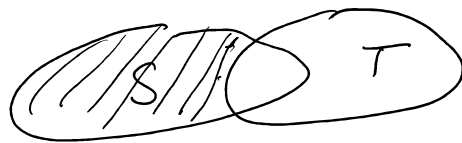
$$\Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (T \cup S_\lambda) \subset T \cup \bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$$

故 (ii) 成立.

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \quad \square$$

设 S 和 T 是两个集合

$$S \setminus T = \{x \in S \mid x \notin T\}$$



设 S 和 T 是两个非空集合

$$S \times T = \{(x, y) \mid x \in S, y \in T\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \in S, y \in T \right\}$$

同样设 $S_1, S_2, \dots, S_m$ 是 m 个非空集

$$S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m = \{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_1 \in S_1, \dots, x_m \in S_m \}$$

特别地 $S_1 = \dots = S_m = S$

$S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m$ 记为 S^m

S 是 m 重笛卡尔积.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 维坐标空间

$$(x_1, \dots, x_n)$$

$$L: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$a_{ij} \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}, \quad i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$$

$$\text{cls}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i=1, \dots, m \right\}$$

$$\text{sol}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \right\}$$

设 L_1, L_2 是两个 n 元线性方程组, L_1 与 L_2 等价当且仅当 $\text{sol}(L_1) = \text{sol}(L_2)$

例 $L = \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_4 = 1 \end{cases}$

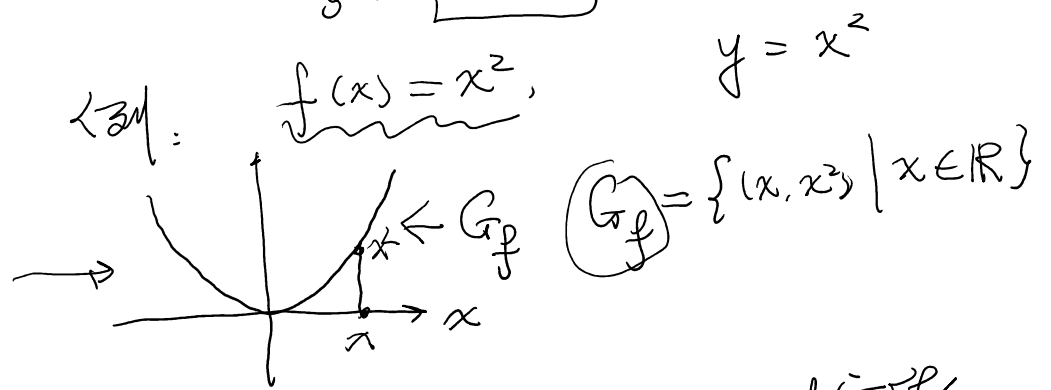
$$\begin{aligned} &\rightarrow x_4 = \frac{1}{3} \\ &x_2 = -2x_1 - 2x_3 + \frac{2}{3}, \quad x_1, x_3 \in \mathbb{R} \\ &\text{sol}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 - 2x_3 + \frac{2}{3} \\ x_3 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

定义: 设 S 是集合. 如果 $S = \{x_1, \dots, x_n\}$
称 S 的 cardinality (势) 为 n
记为 $\text{card}(S) = n$. 也记为 $|S| = n$
此时 S 称为有限集

如果 S 含有无穷多个元素
则 $\text{card}(S) = \infty$.

§4 映射 (map)
 $y = x^2$

§4 映射



定义: 设 S 和 T 是两个非空集合

$f \in S \times T$ 称为

(i) $\forall x \in S, \exists y \in T$ 使得 $(x, y) \in f$

(ii) $\forall x \in S$, 若有 $(x, y_1), (x, y_2) \in f$

则 $y_1 = y_2$

则称 f 是从 S 到 T 的一个映射

记为

$$\boxed{\begin{array}{l} f: S \longrightarrow T \\ x \mapsto f(x) \end{array}}$$

$$\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$

例 设 S 是国际象棋棋手姓名
的集合, T 是 ... 学号
的集合.

$$\begin{array}{l} S \longrightarrow T \\ \text{姓名} \mapsto \text{学号} \end{array} \quad \text{一般映射}$$

$$T \longrightarrow S$$

$$\text{学} \mapsto \text{姓名}$$

例: $f: S \longrightarrow S$

$$x \mapsto x$$

identity

4 恒同映射. 记为 id_f

例 设 $S' \subset S$ 非空子集

$$i: S' \longrightarrow S$$

$$x \mapsto x$$

嵌入 (embedding)

例: $p_s: S \times T \longrightarrow S$

$$(s, t) \mapsto s$$

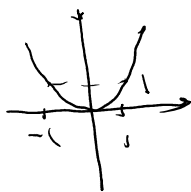
从 $S \times T$ 到 S 的投影.

定义: 设 $f: S \longrightarrow T$

(i) 如果 $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2$

我们有 $f(x_1) \neq f(x_2)$

则称 f 是单射 (injection)



(ii) 如果 $\forall t \in T, \exists s \in S$

使得 $f(s) = t$.

则称 f 是满射 (surjection)

(iii) 如果 f 既单又满, 则称 f 是双射 (bijection)

例 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

$$f|_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{单射.}$$
$$x \mapsto x^2$$

定义: 设 $f: S \rightarrow T$,

S' 是 S 的非空子集

$$f|_{S'}: S' \rightarrow T$$
$$x \mapsto f(x)$$

称为 f 在 S' 上的限制.

§4. = 像集和原像集

设 $f: S \rightarrow T$ 且 $S' \subset S$

$$f(S') = \{f(x) \mid x \in S'\}$$

称为 S' 在 f 下的像集.

特别地 $f(S)$ 称为 f 的像, 记为

$\text{im}(f)$ im. image

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

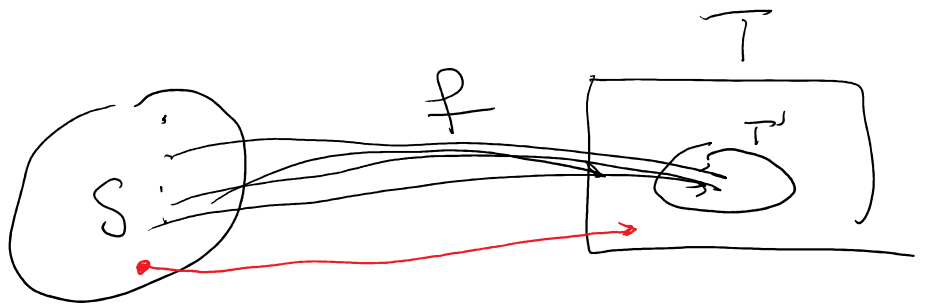
$$\text{im}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$f([0, 1]) = [0, 1]$$

f 是满射 $\Leftrightarrow T = \text{im}(f)$

设 $T' \subset T$ 的子集.

$$\underline{f^{-1}(T')} := \{x \in S \mid f(x) \in T'\}$$



例 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

$$f^{-1}([0,1]) = (-1,0) \cup (0,1)$$

把 $f^{-1}(T')$ 称为 T' 在 f 下的原像集 (逆像集).

注 $f^{-1}(T) = S$

设 $t \in T$, $f^{-1}(\{t\})$ 称为 t 关于 f 的纤维 (fiber)

满射 $\Leftrightarrow \forall t \in T, f^{-1}(\{t\}) \neq \emptyset$
单射 $\Leftrightarrow \forall t \in T, \text{card}(f^{-1}(\{t\})) \leq 1$

$$\text{双射} \iff \forall t \in T, \text{card}(f^{-1}(t)) = 1$$

例: $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin(x)$
 $\text{im}(\sin) = [-1, 1]. \quad \sin(0, \pi) = (0, 1]$

$$f^{-1}(\{0\}) = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

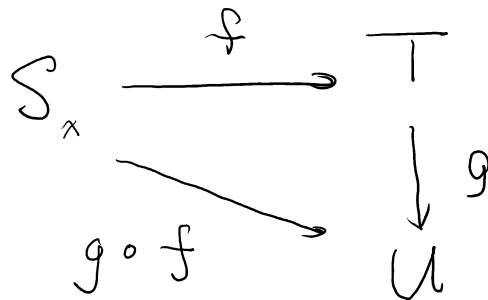


§4.3 映射的复合

设 $f: S \rightarrow T, \quad g: T \rightarrow U$

定义: $h: S \rightarrow U$
 $x \mapsto \underline{g(f(x))}$

称为 f 与 g 的复合 (composition)
 记为 $g \circ f$.



命题: 设 $f: S \rightarrow T, g: T \rightarrow U$

(i) 如果 f, g 都是单射, 则 $g \circ f$ 是单射
 ... 如果 ... 满射 ... 满射

(iii) ... 证明 ...
(iii)

证: (i) 设 $x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2$

$\therefore f$ 是单射

$\therefore f(x_1) \neq f(x_2)$

$\therefore g$ 是单射

$\therefore g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$

即 $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$

$\Rightarrow g \circ f$ 是单射.