映射和复合关系

2022年9月7日 7:22

回忆：

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & T \arrow[d, "g"] \\ & U \end{tikzcd}$$

$g\circ f: S \to U$

$x \mapsto g(f(x))$

命题：设 $f: S\to T$, $g: T\to U$

✓ (i) 如果 f, g 都单，则 $g\circ f$ 单

(ii) 如果 f, g 都满，则 $g\circ f$ 满

(iii) 如果 f, g 都双，则 $g\circ f$ 双

证：

$$\begin{tikzcd} s \arrow[rr, bend left] & & \\ S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & T \arrow[d, "g"] & t \arrow[d, bend left] \\ & U & u \end{tikzcd}$$

设 $u \in U$ ∵ g 满

$\exists\, t \in T$ $u = g(t)$

∵ f 满

∴ $\exists\, s \in S$

$t = f(s)$

$u = g(f(s)) = g\circ f(s)$

于是，$g\circ f$ 满

才是 g的 …

(说明) ✓

例 设 $f: S \to T$

$$id_T \circ f = \underline{f \circ id_S} = f$$

证: $\forall x \in S$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "id_T \circ f"'] & T \arrow[d, "id_T"] \\ & T \end{tikzcd}$$

$$\underline{id_T \circ f}(x) = id_T(f(x)) = f(x)$$

$$\Rightarrow id_T \circ f = f$$

$\forall x \in S$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] & T \\ S \arrow[u, "id_S"] \arrow[ur, "f \circ id_S"'] & \end{tikzcd}$$

$$\underline{f \circ id_S}(x) = f(id_S(x)) = f(x)$$

$$\Rightarrow f \circ id_S = f \quad \square$$

例 设 $f: S \to S$, $g: S \to S$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & S \arrow[d, "g"] \\ & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f \circ g"'] & S \arrow[d, "f"] \\ & S \end{tikzcd}$$

一般而言 $g \circ f \neq f \circ g$

… $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

分区 新分区 48 的第 2 页

一般而言

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$ ，$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

$g \circ f(x) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1$

$f \circ g(x) = f(x^2) = x^2+1$

$\because 2 \neq 0 \quad \therefore x^2+2x+1 \neq x^2+1$

定理（结合律）

设 $f: S \to T$，$g: T \to U$，$h: U \to V$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & T \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\ & U \arrow[r, "h"] & V \end{tikzcd}$$

$(h \circ g) \circ f$
$\|$
$h \circ (g \circ f)$

证：$\forall s \in S$

$(h \circ g) \circ f(s) = (h \circ g)(f(s))$

$= h(g(f(s)))$

$h \circ (g \circ f)(s) = h(g \circ f(s))$

$= h(g(f(s)))$

$\Rightarrow (h \circ g) \circ f(s) = h \circ (g \circ f)(s)$

$\Rightarrow$ 结合律成立 ✓

记号 $h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f$

$(h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$

记号：设 $f: S \to S$　k 正整数

$$f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k}$$

特别规定：$f^0 = id_S$

多个映射的逆

定义：设 $f: S \to T$

如果存在 $g: T \to S$

满足 $g \circ f = id_S$ 且

$f \circ g = id_T$ ...

则称 f 可逆的，且 g 是 f 的

a 一个逆映射.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f=id_S"'] & T \arrow[d, "g"] \\ & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f\circ g=id_T"'] & S \arrow[d, "f"] \\ & T \end{tikzcd}$$

命题：设 $f: S \to T$

则 f 可逆 $\Longleftrightarrow$ f 是双射

证："$\Rightarrow$" 设 f 可逆，g 是 f 的

a 一个逆：$g\circ f = id_S$，$f\circ g = id_T$

$\forall\, x_1, x_2 \in S$，$x_1 \neq x_2$

$g\circ f(x_1) = id_S(x_1) = x_1$

$g\circ f(x_2) = x_2$

$g(f(x_1)) = x_1 \neq x_2 = g(f(x_2))$

$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ [映射的定义]

f 满 单

~ 1

设 $t \in T$ $\because f \circ g = id_T$

$\Rightarrow f$ 满 于是 f 双射

"$\Leftarrow$" 设 f 是双射

则 $\forall t \in T$ $f^{-1}(\{t\}) = \{s\}$

$$g: T \longrightarrow S$$
$$t \longmapsto s \in f^{-1}(\{t\})$$

是良定义 (well-defined)

设 $x \in S$

$g \circ f(x) = g(\underset{\substack{\parallel \\ t}}{f(x)}) = x$

$f^{-1}(\{t\}) = x$

$g \circ f = id_S$

设 $t \in T$

$f \circ g(t) = f(g(t)) = f(s) = t$

设 $g^{-1}(\{t\}) = \{s\}$

$g(t) = s \quad f(s) = t$

$f \circ g = \mathrm{id}_T$

$\Rightarrow f$ 可逆 ∎

命题：设 $f: S \to T$ 可逆

则 f 的逆是唯一的

证：设 $g: T \to S$，$h: T \to S$

是 f 的两个逆

$f \circ g = \mathrm{id}_T$ [逆的定义]

$h \circ (f \circ g) = h \circ \mathrm{id}_T$

$(h \circ f) \circ g = h$ [结合律和性质]

$\mathrm{id}_S \circ g = h$ [性质]

$g = h$ [性质] ∎

推论：设 $f: S \to T$ 可逆，

则 f 逆 记为 f^{-1} (the)

例 $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 不可逆的

$x \longmapsto x^2$

设 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$f: S \longrightarrow S$

$x \longmapsto x^2$

$f^{-1}: S \longrightarrow S$

$x \longmapsto \sqrt{x}$

$g: [0,2] \longrightarrow [0,4]$

$x \longmapsto x^2$

$g^{-1}: [0,4] \longrightarrow [0,2]$

$y \longmapsto \sqrt{y}$

命题: (i) 设 $f: S \to T$ 可逆

则 f^{-1} 也可逆 且

$(f^{-1})^{-1} = f$

(ii) 再设 $g: T \to U$ 可逆

则 $g \circ f$ 可逆 且

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

[illegible]

(穿衣脱衣规则)

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & T \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \arrow[d, "g"] \\ & U \arrow[u, bend left, "g^{-1}"] \arrow[ul, bend left] \end{tikzcd}$$

证明

$f\circ f^{-1} = id_T$

$f^{-1}\circ f = id_S$

$\Rightarrow f = (f^{-1})^{-1}$

(逆元唯一性)

(证) $(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})$

$= g\circ((f\circ f^{-1})\circ g^{-1})$

$= g\circ(id_T\circ g^{-1})$

$= g\circ g^{-1}$

$= id_U$

$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)$

$= f^{-1}\circ(g^{-1}\circ(g\circ f))$

$= f^{-1}\circ((g^{-1}\circ g)\circ f)$

$= f^{-1}\circ(id_T\circ f)$

$= f^{-1}\circ f$

$= id_S$

$\Rightarrow f^{-1} \circ g^{-1} = (f \circ g)^{-1}$ $\boxed{}$

---

§4.5 集合的势

Cantor 康托

设 S 和 T 是两个非空集合

如果存在双射 $\varphi: S \to T$

则称 S 和 T 等势的

(cardinality) 记为 card(S)

① 设 $S = \{x_1, \dots, x_m\}$

$T = \{y_1, \dots, y_n\}$

如果 $m = n$. 则

$$\varphi: S \longrightarrow T$$
$$x_i \longmapsto y_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

则 φ 双

反之 设 $\varphi: S \to T$ 双射

则 $\operatorname{im}(\varphi) = \{\underbrace{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_m)}\}$

抽屉原则

证 $\mathrm{im}(g) \subseteq T$

$\Longrightarrow m \leq n$

$g^{-1}: S \to T$ 也是双射

同理可知 $n \leq m$

$m = n$ $\square$

例：$S = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$\varphi: \mathbb{Z} \to S$

$n \mapsto 2n$

φ 双射，$\mathrm{card}(\mathbb{Z}) = \mathrm{card}(S)$

定义：与 $\mathbb{Z}^+$ 等势的集合称为可数集

与 $\mathbb{Z}^+$ 不等势无穷集称为

不可数的

$\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{Z}^+$：可数；$\mathbb{N}$：可数；$\mathbb{Z}$：可数；$\mathbb{Q}$：可数；$\mathbb{R}$：不可数的；$\mathbb{C}$：不可数的

$\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathbb{C})$

Kronecker

= cardinal

Cantor　Kronecker

§5 等价关系和序关系

§5.1 二元关系

设 S 是非空集合、

$R \subseteq S \times S$

$\forall\, a, b \in S$　如果 $(a, b) \in R$

则称 a 和 b 有关系 R　记为

aRb

例　$R = \{(x, x) \mid x \in S\}$
(x, y)

$xRy \iff x = y$

R 就是 "="

例　设 L 是 $\mathbb{R}^2$ 中所有直线

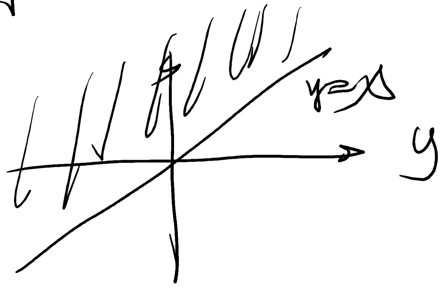
$C = \{(l_1, l_2) \in L^2 \mid l_1, l_2$ 有公共点$\}$

l_1 和 l_2 相交于一点或重合

$$P = L^2 \setminus C$$

$l_1 P l_2 \iff l_1 // l_2$ 且 $l_1 \neq l_2$
不重合

例 $R = \{(x,y) \in R^2 \mid x \le y\}$



§6.2 等价关系

定义：设 S 是非空集，$\sim$ 是 S 上的一个二元关系，如果

自反 → (i) $\forall x \in S$，$x \sim x$

对称 (ii) 如果 $x \sim y$，则 $y \sim x$

传递 (iii) 如果 $x \sim y$、$y \sim z$ 则 $x \sim z$

则称 $\sim$ 是等价关系

例："$=$" 是等价关系

设 T 是 $\mathbb{R}^2$ 中所有的三角形

则 "≅"、"∼" 是等价关系

例：设 S 是某中学全体学生的集合，$\sim_C$ 是 S 上的二元关系，定义如下

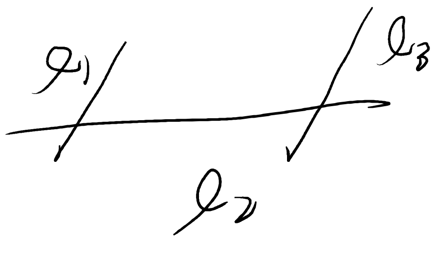
$$x \sim_C y \quad 如果\ x, y\ 同班$$

$\sim_C$ 是 S 上的等价关系

例：设 L 是 $\mathbb{R}^2$ 中所有直线的集合，$\perp$ 二元关系 C（在 L 上）定义如上

C 满足自反性、对称性

$l_1 // l_3$ 且不重合



$l_1 \, C \, l_2$

$l_2 \, C \, l_3$ $\not\Rightarrow$ $l_1 \, C \, l_3$

P：不满足第一条

4、可能出现中

"≤"　　$1 \le 2$ 和 $2 \le 1$

同余关系

复习整数的除法

设 m、n 是整数　$n > 0$

则存在 q、r 满足

商　　　余数

$$m = qn + r$$

被除数　　　除数

且 $r \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$

例：$m = -14$，$n = 6$

$$14 = 2 \times 6 + 2$$

$$-14 = (-2) \times 6 + (-2)$$

$$= (-2) \times 6 - 6 + 6 - 2$$

$$= \underline{(-3)} \times 6 + \underline{4}$$

验证：q、r 是唯一的

再设 $m = q'n + r'$

其中 $q' \in \mathbb{Z}$，$r' \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

不妨设 $r \geq r'$

$[\, m = qn + r \,]$

$0 = (q - q')n + \underline{r - r'}$

(※) $\underline{(q' - q)\underset{\triangle}{n} = \underline{r - r'} \geq 0}$

$r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$
$r' \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$　$r \geq r'$

$0 \leq r - r' < n$

由 (※) 可知：$q' = q \Rightarrow r = r'$

记 $q = \underline{quo}(m, n)$、　$r = \underline{rem}(m, n)$

$\downarrow$ 商　　$\downarrow$ 余数

定义：设 m, n 是两个整数

$n \neq 0$

如果 $\exists\, q \in \mathbb{Z}$　$\underline{m = qn}$

则称 n 是 m 的因子

m是n的倍数

也称n整除m，记为$n|m$

引理 设$m,n\in\mathbb{Z}$，$n>0$

$n|m \iff rem(m,n)=0$

定义：设$n\in\mathbb{Z}$，$n>1$

设$a,b\in\mathbb{Z}$，称a和b关于

n同余 如果

$n|(a-b)$

记为 $a\equiv_n b$ $[a\equiv b \bmod n]$

验证"$\equiv_n$"是$\mathbb{Z}$上等价关系

(i) 自反性，设$a\in\mathbb{Z}$

$a-a=0$ $0=0\cdot n$

$\Rightarrow n|0 \Rightarrow n|(a-a)$

$\Rightarrow a\equiv_n a$

(ii) 对称性，设$a\equiv_n b$

则 $n|(a-b)$

即 $\exists\, q \in \mathbb{Z}$ $\quad a-b=qn$

$$\Rightarrow \quad b-a=(-q)n$$

$$\Rightarrow \quad n \mid (b-a)$$

$$\Rightarrow \quad b \equiv_n a$$

(iii) 传递 设 $a \equiv_n b$, $b \equiv_n c$

即 $a-b \equiv pn$ 其中 $p, q \in \mathbb{Z}$

$b-c = qn$

$$a-c=(p+q)n$$

$$\Rightarrow \quad n \mid (a-c) \Rightarrow a \equiv_n c$$

"$\equiv_n$" 等价关系.