第一章　预备知识

1　代数起源于解方程

1.1　线性方程(组)

设 a, b 是实数. 求实数 x 使得

$$ax = b.$$

(i) $a \neq 0$, 唯一解; 轨迹是实轴上一个点.

(ii) $a = 0$, $b \neq 0$, 无解.

(iii) $a = b = 0$, 不止一个解; 轨迹是整个实轴.

设 a, b, c 是实数. 求实数 x, y 使得

$$ax + by = c.$$

(i) a, b 不全为零, 不止一个解; 轨迹是实平面上的一条直线.

(ii) $a = b = 0$, $c \neq 0$, 无解.

(iii) $a = b = c = 0$, 不止一个解; 轨迹是整个实平面.

设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 是实数. 求实数 x, y 使得

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}.$$

(i) 唯一解, 轨迹是实平面上两条不平行直线的交点.

(ii) 无解.

(iii) 不止一个解, 两条重合的直线或实平面.

设 a, b, c, d 是实数. 求实数 x, y, z 使得

$$ax + by + cz = d.$$

说服自己当 a, b, c 不全为零时, 上述方程代表三维实空间的一张平面.

一般的实系数线性方程组表述如下:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}. \tag{1}$$

它有 n 个未知数和 m 个方程.

下面我们引入矩阵来简洁地表示线性方程组. 实数上

的 m 行 n 列的矩阵是指

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

对 $i=1,2,\ldots,m$, A 的第 i 行(向量)是 $(a_{i,1},a_{i,2},\ldots,a_{i,n})$, 记为 $\vec{A}_i$. 对 $j=1,2,\ldots,n$, A 的第 j 列(向量)是

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}.$$

记为 $\vec{A}^{(j)}$. (2) 中的矩阵可简记为 $(a_{i,j})_{m\times n}$.

注解 1.1 我们用 $O_{m\times n}$ 代表由 m 行和 n 列个 0 组成的矩阵, 称为 $m\times n$ 阶零矩阵.

例 1.2 设矩阵 A 由 (2) 给出. 则对 $i=1,2,\ldots,m$, $\vec{A}_i$ 是 *1* 行 n 列的矩阵. 对 $j=1,2,\ldots,n$, $\vec{A}^{(j)}$ 是 m 行 1 列的矩阵. 特别地, 每个实数都是一行一列的矩阵.

矩阵 (2) 称为方程组 (1) 的 系数矩阵. 而矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

称为 (1) 的 增广矩阵. (1) 称为以 B 为增广矩阵的 关于 $x_1, \ldots, x_n$ 的线性方程组. 如果我们说 B 是一个线性方程组的增广矩阵, 则该方程组是指 (1).

定义 1.3 如果 (1) 有解, 则称它是 相容的 *(compatible)*. 否则称之为 不相容的. *(incompatible)*. 设 (1) 相容. 如果它的解唯一, 则称之为确定的 *(deterministic)*. 否则称之为不确定的 *(non-deterministic)*.

例 1.4 设方程组 T_n 的增广矩阵是

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} & b_n \end{pmatrix},$$

其中 $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ 都不等于零. 证明: T_n 是确定的.

证明. 设 T_n 对应的未知数是 $x_1, \ldots, x_n$. 我们对 n 归纳. 当 $n=1$ 时, T_1 是

$$a_{1,1}x_1 = b_1.$$

它的唯一解是 $x_1 = b_1/a_{1,1}$.

设 $n>1$ 且结论对 T_{n-1} 成立. 在 T_n 中, 我们有方程 $a_{n,n}x_n = b_n$. 故 $x_n = b_n/a_{n,n}$. 将其带入到 T_n 中的前 $n-1$ 方程中, 我们得到关于 $x_1, \ldots, x_{n-1}$ 的线性方程组 U_{n-1}. 其增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & b_1 - \frac{a_{1,n}b_n}{a_{n,n}} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & b_2 - \frac{a_{2,n}b_n}{a_{n,n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & b_{n-1} - \frac{a_{n-1,n}b_n}{a_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

则 $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_{n-1} = \alpha_{n-1}, x_n = \alpha_n$ 是 T_n 的解当且仅当 $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_{n-1} = \alpha_{n-1}$ 是 U_{n-1} 的解且 $\alpha_n = b_n/a_{n,n}$.

注意到 U_{n-1} 的系数矩阵仍为上三角形式且对角线上元素都非零。故归纳假设蕴含 U_{n-1} 的解存在且唯一. 由此可知, T_n 的解存在且唯一. 即 T_n 是确定的. □

1.2 高次方程(组)

设 a, b, c 是实数且 $a \neq 0$. 求 x 使得

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

配方法:

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)\\&=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right).\end{aligned}$$

于是, 上述一元二次方程等价于

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

令 $y=x+\frac{b}{2a}$. 则

$$y^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

故求解一元二次方程等价于开平方. 我们有

$$y=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\implies x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

注解 1.5 当 $b^2-4ac<0$ 时, 一元二次方程没有实数解.

设 a,b,c,d 是实数且 $a\neq 0$. 求 x 使得

$$ax^3+bx^2+cx+d=0. \tag{3}$$

令

$$x=y-\frac{b}{3a}.$$

将 y 代入等价于 (3) 的方程

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

得

$$\left(y-\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{b}{a}\left(y-\frac{b}{3a}\right)^2+\frac{c}{a}\left(y-\frac{b}{3a}\right)+\frac{d}{a}=0.$$

化简后, 我们有

$$y^3+py+q=0, \tag{4}$$

其中 p,q 是实数.

注解 1.6 设

$$f(x)=x^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}x+\frac{a_0}{a_n}.$$

令

$$x=y-\frac{a_{n-1}}{na_n}$$

并代入 f 得到 n 次多项式 $g(y)$. 该多项式的次高项的系数等于零.

为了求解 (4), 令

$$y=z-\frac{p}{3z}. \tag{5}$$

代入 (4) 得

$$\left(z-\frac{p}{3z}\right)^3+p\left(z-\frac{p}{3z}\right)+q=0.$$

展开后, 我们有:

$$z^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0.$$

化简得

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{6}$$

通过这个方程求出 z^3, 再通过开立方求得 y, 然后得到 x. 由此可知我们可以通过有理运算(加、减、乘、除), 开平方和开立方求出一元三次方程的根. 变换 (5) 是非平凡的, (6) 称为 (3) 的预解式 (resolvent).

一元四次方程可以通过有理运算、开平方、开立方和开四次方求解. 其核心技巧也是构造预解式. 但 Abel 和 Galois 证明了一元五次方程不可能通过有理运算和开方求解。特别地, Galois 的证明催生了一门新的数学分支: 抽象代数.

求解多元高次代数方程组是代数几何的起源. 总之, 代数是可以操作的几何, 几何是可以描绘的代数.

2 线性方程组初步

设 L 和 L' 是两个实系数 n 元线性方程组. 如果或者 L 和 L' 都不相容, 或者 L 和 L' 有相同的实解, 则称它们是等价的. 本节的目的是把一个线性方程组化为一个等价的线性方程组, 而后者的相容性和确定性是容易判断的.

2.1 矩阵的初等行变换

设 $A = (a_{i,j})_{m\times n}$ 是 $m \times n$ 的实矩阵, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

(i) 把 A 中第 i 行和第 j 行互换位置得到矩阵 A'. 则称 A' 是通过第 I 类初等行变换由 A 得到的. 此时 A' 的第 i 行和第 j 行分别是

$$(a_{j,1}, \ldots, a_{j,n}) \quad \text{和} \quad (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}).$$

其它行与 A 相同.

(ii) 设 $i \ne j$, α 是实数. 把 A 的 第 i 行通乘 α 后加到第 j 行上得到矩阵 A'. 则称 A' 是通过第 II 类初等行变换由 A 得到的. 时 A' 的第 j 行是

$$(\alpha a_{i,1} + a_{j,1}, \ldots, \alpha a_{i,n} + a_{j,n}).$$

其它行与 A 相同.

(iii) 设 α 是非零实数. 把 A 的 第 i 行通乘 α 得到矩阵 A'. 则称 A' 是通过第 III 类初等行变换由 A 得到的. 时 A' 的第 i 行是

$$(\alpha a_{i,1}, \ldots, \alpha a_{i,n}).$$

其它行与 A 相同.

I、II、III 类初等行变换统称初等行变换.

引理 2.1 *设 n 元线性方程组 L 的增广矩阵是 B, 对 B 进行一次初等行变换得到矩阵 B'. 再设 B' 对应的线性方程组是 L'. 则 L 与 L' 等价.*

证明. 当 B' 是通过第 I 类初等行变换由 B 得到的. 则 L' 是把 L 中两个方程互换位置得到的方程组. 于是, L 和 L' 显然等价. 当 B' 是通过第 III 类初等行变换由 B 得到的. 则 L' 是把 L 中某个方程通乘一个非零实数得到的方程组. 于是, L 和 L' 等价.

下面我们考虑第二类初等变换. 设

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

则 L 是

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \cdots + a_{j,n}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right. .$$

而 L' 是

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i \\ \vdots \\ (\alpha a_{i,1} + a_{j,1})x_1 + (\alpha a_{i,2} + a_{j,2})x_2 + \cdots + (\alpha a_{i,n} + a_{j,n})x_n = \alpha b_i + b_j \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}.$$

下面我们来证明 L 和 L' 同解. 设

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 \\ x_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \beta_n \end{cases} \tag{7}$$

是 L 的一个解. 代入 L' 的第 j 个方程得

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_{i,k} + a_{j,k})\beta_k = \alpha \sum_{k=1}^{k} a_{i,k}\beta_k + \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}\beta_k = \alpha b_i + b_j.$$

注意到 L 和 L' 只有第 j 个方程不同. 故 (7) 是 L' 的解.

反之, 设 (7) 是 L' 的解. 方程组 L 中只有第 j 个方程

与 L' 中不一样, 把解代入该方程得:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}\beta_k &= \sum_{k=1}^{n}(\alpha a_{i,k} + a_{j,k} - \alpha a_{i,k})\beta_k \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_{i,k} + a_{j,k})\beta_k}_{L' \text{ 中第 } j \text{ 个方程}} - \alpha \underbrace{\sum_{k=1}^{k} a_{i,k}\beta_k}_{L' \text{ 中第 } i \text{ 个方程}} \\ &\overset{\because\, j\neq i}{=} \alpha b_i + b_j - \alpha b_i = b_j.\end{aligned}$$

故 (7) 也是 L 的解. □

命题 2.2 设 n 元线性方程组 L 的增广矩阵是 B, 对 B 进行有限次初等行变换得到矩阵 B'. 再设 B' 对应的线性方程组是 L'. 则 L 与 L' 等价.

证明. 有限次利用引理 2.1 即得. □

2.2 阶梯型矩阵

设 A 是 $m\times n$ 的实矩阵. 如果

$$A = \begin{pmatrix} 0\cdots0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & *\cdots* \\ 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & *\cdots* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & *\cdots* \\ 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\cdots0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\cdots0 \end{pmatrix},$$

其中 $\bullet$ 代表非零实数, $*$ 代表任意实数, 则称 A 是阶梯型矩阵. 特别地, 仅由零组成的矩阵是阶梯型的.

命题 2.3 设 A 是 $m \times n$ 的实矩阵. 通过有限次第 I 类和第 II 类初等行变换, 我们可以把 A 化为一个阶梯型矩阵.

证明. 设 A 不是零矩阵. 我们对 m 归纳. 当 $m = 1$ 时, A 本身是阶梯型的. 故命题成立. 设 $m > 1$ 且命题对 $m - 1$ 成立. 设 ℓ 列是 A 中第一个含有非零数的列, 其中一个非零数等于 a 并出现在第 k 行. 我们把第一行和第 k 行对调得到矩阵

$$B = \begin{array}{c} \downarrow^{\ell} \\ \begin{pmatrix} 0\cdots 0 & a & *\cdots * \\ 0\cdots 0 & b_2 & *\cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots 0 & b_m & *\cdots * \end{pmatrix} \end{array},$$

其中 $b_2, \ldots, b_m$ 是实数. 把第一行通乘 $-b_2 a^{-1}$ 加到第二行上得

$$C = \begin{array}{c} \downarrow^{\ell} \\ \begin{pmatrix} 0\cdots 0 & a & *\cdots * \\ 0\cdots 0 & 0 & *\cdots * \\ 0\cdots 0 & b_3 & *\cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots 0 & b_m & *\cdots * \end{pmatrix} \end{array}$$

类似地, 我们把第一行通乘 $-b_i a^{-1}$ 加到第 i 行上, $i = 3, 4, \ldots, m$ 得

$$D = \begin{array}{c} \downarrow^{\ell} \\ \begin{pmatrix} 0\cdots 0 & a & *\cdots * \\ 0\cdots 0 & 0 & *\cdots * \\ 0\cdots 0 & 0 & *\cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots 0 & 0 & *\cdots * \end{pmatrix} \end{array}.$$

设 D' 是由 D 中第二行、第三行、$\ldots$, 第 m 行组成得矩阵. 则 D' 有 $m-1$ 行.

根据归纳假设, 通过有限次第 I 类和第 II 类初等行变换, 我们可以把 D' 化为一个阶梯型矩阵 D'', 其中前 $\ell+1$ 列中得元素都等于零. 而对 D' 做初等行变换相当于对 D 做初等行变换. 于是, 通过有限次第 I 类和第 II 类初等行变换, 我们把 D 化为阶梯矩阵

$$\begin{pmatrix} 0\cdots 0 & a & *\cdots * \\ & D'' & \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 2.4 利用初等行变换把矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

化为阶梯型.

解.

$$A \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{8}{3}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

2.3 高斯消去法

设 L 是一个 n 元线性方程组, 其系数矩阵为 A, 增广矩阵为 $B=(A|\mathbf{b})$. 由命题 2.3 我们可以对 B 做有限次初等行变换把系数矩阵 A 化为阶梯型得到: 矩阵

$$D=(C|\mathbf{d}) \begin{pmatrix} 0\cdots0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & **\cdots* & d_1 \\ 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & **\cdots* & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet *\cdots* & d_k \\ 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\,0\cdots\,0 & d_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\,0\cdots\,0 & d_m \end{pmatrix},$$

定理 2.5 利用上述记号. 我们有

(i) L 相容当且仅当 $d_{k+1}=\cdots=d_m=0$;

(ii) L 确定当且仅当 $d_{k+1}=\cdots=d_m=0$ 且 $k=n$.

证明. 设 L' 是以 C 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 由命题 2.2, L' 与 L 等价. 于是, 我们只要对 L' 讨论其相容性和确定性即可.

(i) 如果 $d_{k+1},\ldots,d_m$ 不全为零, 则 L' 不相容. 设 d_{k+1}, $\ldots$, d_m 都等于零. 设由 $\bullet$ 代表的非零元分别出现在第 ℓ_1, $\ldots$, ℓ_k 列, 其中 $1\le \ell_1<\cdots<\ell_k\le n$. 记 L' 中的未知数是 $x_1,\ldots,x_n$. 令 $x_j=0$, 其中 j 不等于 $\ell_1,\ldots,\ell_k$ 中的任何一个. 我们得到方程组

$$\left\{\begin{array}{r} c_{1,\ell_1}x_{\ell_1}+c_{1,\ell_2}x_{\ell_2}+c_{1,\ell_3}x_{\ell_3}+\cdots+c_{1,\ell_{k-1}}x_{\ell_{k-1}}+c_{1,\ell_k}x_{\ell_k}=d_1 \\ c_{2,\ell_2}x_{\ell_2}+c_{2,\ell_3}x_{\ell_3}+\cdots+c_{2,\ell_{k-1}}x_{\ell_{k-1}}+c_{2,\ell_k}x_{\ell_k}=d_2 \\ \ddots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ c_{k-1,\ell_{k-1}}x_{\ell_{k-1}}+c_{k-1,\ell_k}x_{\ell_k}=d_{k-1} \\ c_{k,\ell_k}x_{\ell_k}=d_k, \\ 0=0 \\ \vdots \\ 0=0 \end{array}\right. , \tag{8}$$

其中 $c_{1,\ell_1},c_{2,\ell_2},\ldots,c_{k-1,\ell_{k-1}},c_{k,\ell_k}$ 是非零实数. 根据例 1.4, 上述方程组相容.

(ii) 如果 $d_{k+1}=\cdots=d_m=0$ 且 $k=n$. 则 $m\ge n$ 且

$\ell_1 = 1, \ldots, \ell_k = n$. 于是, L' 是

$$\begin{cases} c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + c_{1,3}x_3 + \cdots + c_{1,n-1}x_{n-1} + c_{1,n}x_n = d_1 \\ \qquad\qquad c_{2,2}x_2 + c_{2,3}x_3 + \cdots + c_{2,n-1}x_{n-1} + c_{2,n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{n-1,n-1}x_{n-1} + c_{n-1,n}x_n = d_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_{n,n}x_n = d_n, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

根据例 1.4, 上述方程组确定.

反之, 设 L' 有唯一解. 由 (i) 可知 $d_{k+1} = \cdots = d_m = 0$. 如果 $k < n$, 则存在未知数 x_j 使得 j 不等于 $\ell_1, \ldots, \ell_k$ 中的

任何一个. 令这样的 x_j 都等于 1. 我们得到相容的方程组

$$\begin{cases} c_{1,\ell_1}x_{\ell_1} + c_{1,\ell_2}x_{\ell_2} + c_{1,\ell_3}x_{\ell_3} + \cdots + c_{1,\ell_{k-1}}x_{\ell_{k-1}} + c_{1,\ell_k}x_{\ell_k} = \tilde{d}_1 \\ \qquad c_{2,\ell_2}x_{\ell_2} + c_{2,\ell_3}x_{\ell_3} + \cdots + c_{2,\ell_{k-1}}x_{\ell_{k-1}} + c_{2,\ell_k}x_{\ell_k} = \tilde{d}_2 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad c_{k-1,\ell_{k-1}}x_{\ell_{k-1}} + c_{k-1,\ell_k}x_{\ell_k} = \tilde{d}_{k-1} \\ \qquad\qquad\qquad c_{k,\ell_k}x_{\ell_k} = \tilde{d}_k, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0. \end{cases}$$

对比(8) 可知 L' 有两个不同的解, 矛盾. □

例 2.6 *判断下面两个方程组 L_B 和 L_C 分别由增广矩阵 B 和 C 确定.*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

判断 L_B 和 L_C 的相容性和确定性

解. 通过对 B 做初等行变换把 L_B 的系数矩阵化为阶梯型

得

$$B \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{8}{3}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

根据定理 *2.5*, L_B 不相容.

通过对 C 做初等行变换把 L_C 的系数矩阵化为阶梯型得

$$C \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据定理 *2.5*, L_C 相容但不确定. □

2.4 齐次线性方程组

实系数线性方程组 H

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}. \tag{9}$$

称为 齐次 线性方程组. 显然, H 由它的系数矩阵唯一确定且 $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ 是它的一个解. 称之为 H 的平凡解或零解. 故 H 必然相容.

定理 2.7 齐次线性方程组 H 有非平凡解当且仅当其系数矩阵可以通过第 *I, II* 类初等行变换化为

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\cdots 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & *\cdots * \\ 0\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & *\cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & *\cdots * \end{pmatrix}_{k\times n} \\ O_{(m-k)\times n} \end{pmatrix}$$

其中 $\bullet$ 代表非零实数, $*$ 代表任意实数, 而 $k<n$.

证明. 根据定理 2.5, H 不确定当且仅当它的增广矩阵可通过第 I, II 类初等行变换化为

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\cdots 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & *\cdots * & 0 \\ 0\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & *\cdots * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & *\cdots * & 0 \end{pmatrix}_{k\times(n+1)} \\ O_{(m-k)\times(n+1)} \end{pmatrix}$$

且 $k<n$. $\square$.

由此我们得到一个重要的结论.

推论 2.8 设齐次线性方程组 (9) 中 $m<n$. 则该方程组有非平凡解.

证明. 设通过第 I, II 类初等行变换把该方程组的系数矩阵化为的阶梯型有 k 个非零行. 则 $k \leq m < n$. 由定理 2.7, 该方程组必有非平凡解. □