第一章　预备知识

2.5　二阶行列式

行列式 (determinant) 在一定条件下可以通过表线性方程组的系数表示该方程组解. 我们在这里讨论二阶行列式的情形. 设实系数二阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

它的行列式定义为 $ad - bc$, 记为 $\det(A)$ 或 $|A|$.

命题 2.1 关于未知数 x, y 的实系数线性方程组

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

是确定的当且仅当其系数矩阵的行列式非零. 此时方程组的解等于

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

证明. 设方程组是确定的. 则 a, c 不全为零. 不妨设 $a \neq 0$. 由高斯消去法得

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b & e \\ 0 & d - a^{-1}cb & f - a^{-1}ce \end{pmatrix}.$$

由第一讲定理 2.5 (ii) 可知, $d - a^{-1}cb \neq 0$. 于是, $ad - cb \neq 0$.

反之, 设 $ad - cb \neq 0$. 则 a, c 不全为零. 不妨设 $a \neq 0$. 于是, 上述的消元过程和结果不变, 且 $d - a^{-1}cb \neq 0$. 由第一讲定理 2.5 (ii) 可知, 原方程组是确定的. 此时

$$y = \frac{f - a^{-1}ce}{d - a^{-1}cb} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

代入第一个方程得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}. \quad \square$$

3 集合

一个集合(set)是指一些(有限或无限)具有共同性质的

个体的总合. 例如 $S=\{1,2,3\}$ 是集合. 它也可以表示为

$$S=\{x\,|\,x\text{ 是小于 4 的正整数}\}.$$

我们以后常用的集合包括: 正整数集 $\mathbb{Z}^+$, 非负整数集 $\mathbb{N}$, 整数集 $\mathbb{Z}$, 有理数集 $\mathbb{Q}$, 实数集 $\mathbb{R}$ 和复数集 $\mathbb{C}$ 等.

集合中的个体称为该集合中的*元素*. 如果 a 是集合 S 中的元素, 则我们记 $a\in S$; 否则记 $a\notin S$. 例如: $5\in\mathbb{Z}$ 但 $1/2\notin\mathbb{Z}$. 不含任何元素的集合称为*空集*, 记作 $\emptyset$.

设 S,T 是两个集合. 如果 S 中的元素都是 T 中的元素, 则称 S 是 T 的*子集*, 记为 $S\subset T$ 或 $S\subseteq T$. 如果 $S\subset T$ 但 $S\neq T$, 则称 S 是 T 的*真子集*, 记为 $S\subsetneqq T$. 特别地, 空集是任何非空集合的真子集.

我们有子集链

$$\mathbb{Z}^+\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}.$$

设 S,T 是两个集合. 由 S 和 T 中的元素组成的集合称为 S 和 T 的*并* (union), 记为 $S\cup T$. 对任意的集合 S, 我们有 $S\cup\emptyset=S$.

例 3.1 *设 $S=\{1,2,3,4\}$ 和 $T=\{0,3,5\}$. 则*

$$S\cup T=\{0,1,2,3,4,5\}.$$

类似地, 我们可以定义多个和无穷多个集合的并如下, 设 Λ 是一个指标集, 每一个 λ 对应一个集合 S_λ, 则所有 S_λ 中

的元素组成的集合称为这些 S_λ 的并, 记为

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda.$$

例 3.2 设 $\mathbb{R}^+$ 是所有正实数的集合. 对任意 $x \in \mathbb{R}^+$, $S_x = (x-1, x+1)$. 则

$$\bigcup_{x\in\mathbb{Q}^+} S_x = (-1, +\infty).$$

设 S, T 是两个集合. 由 S 和 T 中的共同元素组成的集合称为 S 和 T 的交 (intersection), 记为 $S \cap T$. 对任意的集合 S, 我们有 $S \cap \emptyset = \emptyset$.

例 3.3 设 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 和 $T = \{0, 3, 5\}$. 则 $S \cap T = \{3\}$.

类似地, 我们可以定义多个和无穷多个集合的交如下, 设 Λ 是一个指标集, 每一个 λ 对应一个集合 S_λ, 则在所有 S_λ 中的元素组成的集合称为这些 S_λ 的交, 记为

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda.$$

例 3.4 设 $\mathbb{R}^+$ 是所有正实数的集合. 对任意 $x \in \mathbb{R}^+$, $T_x = [x-1, x+1]$. 则

$$\bigcap_{x\in\mathbb{R}^+} T_x = \emptyset.$$

集合的并和交显然满足交换律和结合律.

引理 3.5 设 S 是集合, 且对任意 $\lambda \in \Lambda$, U_λ 也是集合.

(i) 如果对任意 $\lambda \in \Lambda, U_\lambda \subset S$, 则 $\cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \subset S$;

(ii) 如果对任意 $\lambda \in \Lambda, S \subset U_\lambda$, 则 $S \subset \cap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$.

证明. (i) 设 $x \in \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. 则存在 $\lambda_0 \in \Lambda$ 使得 $x \in S_{\lambda_0}$. 因为 $U_{\lambda_0} \subset S$, 所以 $x \in S$. 故 (i) 成立.

(ii) 设 $x \in S$. 则对任意 $\lambda \in \Lambda, x \in U_\lambda$. 故 $x \in \cap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. 故 (ii) 成立. □

命题 3.6 *(分配律)* 设 Λ 是一个指标集, 每一个 λ 对应一个集合 S_λ. 再设 T 是一个集合. 则

(i) $T \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(T \cap S_\lambda)$;

(ii) $T \cup \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(T \cup S_\lambda)$.

证明. (i) 设 $x \in T \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\right)$. 则 $x \in T$ 且 $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$. 于是, 存在 $\lambda_0 \in \Lambda$ 使得 $x \in S_{\lambda_0}$. 由此可知, $x \in T \cap S_{\lambda_0}$. 故 $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(T \cap S_\lambda)$. 换言之,

$$T \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\right) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(T \cap S_\lambda).$$

反之, 对任意 $\lambda \in \Lambda$

$$T \cap S_\lambda \subset T \stackrel{\text{引理 3.5(i)}}{\Longrightarrow} \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(T \cap S_\lambda) \subset T$$

且

$$T \cap S_\lambda \subset S_\lambda \subset \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\right) \overset{\text{引理 3.5(i)}}{\Longrightarrow} \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(T \cap S_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda.$$

再根据引理 3.5(ii),

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(T \cap S_\lambda) = T \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\right).$$

(ii) 类似. □

设 S 和 T 是两个集合. 集合 $S \setminus T$ 由在 S 中但不在 T 中的元素组成. 称之为 S 关于 T 的*差* (difference). 例如:

$$\mathbb{Z} \setminus \{q \in \mathbb{Q} | q < 0\} = \mathbb{N}.$$

设 $S_1, \ldots, S_k$ 是非空集合. 它们的*笛卡尔积(Cartisian Product)* 是指集合

$$\{(x_1, \ldots, x_k) \,|\, x_1 \in S_1, \ldots, x_k \in S_k\}.$$

记为 $S_1 \times \cdots \times S_k$. 当 $S_1, \ldots, S_k$ 都等于集合 S 时. 集合 $\underbrace{S \times \cdots \times S}_{k}$ 简记为 S^k. 例如二维实平面可简记为 $\mathbb{R}^2$.

如果集合中含有有限多个元素, 则该集合称为*有限集*. 否则称之为*无限集*. 对有限集 S, 它中元素的个数记为 $|S|$ 或 $\text{card}(S)$, 其中 card 是 cardinality 的缩写. 特别地, $|\emptyset| = 0$.

最后, 我们用集合论的语言来刻画线性方程组的解. 设 L 是一个实系数关于未知数 $x_1, \ldots, x_n$ 的线性方程组. 令

$$\mathrm{sol}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ 使得 } x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n \text{ 是 } L \text{ 的解} \right\}.$$

称之为 L 的解的集合. 则 L 相容当且仅当 $\mathrm{sol}(L) \neq \emptyset$; L 确定当且仅当 $|\mathrm{sol}(L)| = 1$. 注意到：当 L 有 n 个未知数时

$$\mathrm{sol}(L) \subset \mathbb{R}^n.$$

例 3.7 线性方程组 L_C 由增广矩阵 C

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

确定. 计算 $\mathrm{sol}(L_C)$.

解. 由第一讲例 *2.6* 可知, 通过对 C 做初等行变换把 L_C 的系数矩阵化为阶梯型得

$$C \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, L_C 等价于方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 3x_4 = 1. \end{cases}$$

于是, 解为 $x_4 = 1/3$, $x_1 = 1/3 - (1/2)x_2 - x_3$, 其中 x_2, x_3 是任意实数. 故

$$\mathrm{sol}(L_C) = \{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{2}u - v \\ u \\ v \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{R}\}. \quad \square$$

4 映射

4.1 定义、例子和类型

定义 4.1 设 S 和 T 是两个非空集合, $f \subset S \times T$. 如果对任意的 $x \in S$, 存在唯一 $y \in T$ 使得 $(x, y) \in f$. 则称 f 是从 S 到 T 的映射 (map).

通常我们把从 S 到 T 的映射 f 记为:

$$\begin{aligned} f:\ S &\longrightarrow T \\ x &\mapsto y, \end{aligned}$$

其中, $(x, y) \in f$. 因为 y 唯一, 所以我们把 y 记为 $f(x)$. 该映射也简记为 $f : S \longrightarrow T$.

例 4.2 从国科大在读学生的学号到对应学生的姓名是一个映射. 但从学生姓名到他们对应的学号就不一定是映射, 这是因为有重名的可能.

以下映射在今后会经常用到.

例 4.3 映射

$$\begin{aligned} f:\ S &\longrightarrow S \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

称为集合 S 上的恒同映射, 通常记为 id_S, 其中 id 是 *identity* 的缩写.

设 S' 是集合 S 的非空子集, $f: S \to T$ 是映射. 则

$$\begin{aligned} g:\ S' &\longrightarrow T \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

是从 S' 到 T 的映射. 称之为 f 在子集 S' 上的限制, 并记为 $f|_{S'}$. 反之, 考虑映射 $h: S' \longrightarrow T$. 如果 $f|_{S'} = h$, 则称 f 是 h 的扩展. 显然 f 是 $f|_{S'}$ 的扩展. 但它的扩展可能不止一个.

例 4.4 设 S' 是 S 的非空子集. 定义

$$\begin{aligned} i_{S'}:\ S' &\longrightarrow S \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

称为 S' 到 S 的嵌入.

例 4.5 映射

$$\begin{aligned} p_1:\ S \times T &\longrightarrow S \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

称为从 $S \times T$ 到 S 的投影 *(projection)*. 类似地, 我们可以定义从 $S \times T$ 到 T 的投影.

定义 4.6 考虑映射 $f : S \longrightarrow T$.

(i) 如果对任意 $x_1, x_2 \in S$ 且 $x_1 \neq x_2$, 我们都有

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

则称 f 是单射 (injection).

(ii) 如果对任意 $y \in T$, 存在 $x \in S$ 使得 $y = f(x)$, 则称 f 是满射 (surjection).

(iii) 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 是双射 (bijection).

例 4.7 恒同映射是双射.

考虑映射

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

它既不是单射也不是满射. 设 $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. 则 $f|_{\mathbb{R}^+}$ 是单射.

嵌入 $i'_S : S' \longrightarrow S$ 是单射, 投影 $p_S : S \times T \longrightarrow S$ 是满射. 函数 $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 不是单射. 但 $\cos|_{[0,\pi]}$ 是单射.

4.2 像集和原像集

设 $f: S \longrightarrow T$ 是映射, 且 $S' \subset S$. 集合

$$f(S') = \{f(x) \,|\, x \in S'\}$$

称为 S' 在 f 下的像集. 特别地, $f(S)$ 称为 f 的像集, 记为 $\mathrm{im}(f)$, 这里 im 是 image 的缩写. 映射 f 是满射当且仅当 $f(S) = T$.

设 $T' \subset T$. 集合

$$f^{-1}(T') = \{x \in S \,|\, f(x) \in T'\}$$

称为 T' 在 f 下的*原像集(逆像集)*. 由映射的定义可知 $f^{-1}(T) = S$.

设 $t \in T$. 我们称 $f^{-1}(\{t\})$ 是 t 关于 f 的*纤维(fibre)*. 我们可以利用纤维来描述单射、满射和双射. 映射 f 是单射当且仅当 关于 f 的每个纤维至多含有一个元素, f 是满射当且仅当它的每个纤维非空, f 是双射当且仅当它的每个纤维恰好含有一个元素.

例 4.8 设 $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 由公式 $f(x) = \sin(x)$ 给出. 则

$$\mathrm{im}(f) = [-1, 1], \;\; f((0, \pi)) = (0, 1], \;\; f^{-1}(\{0\}) = \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$

4.3 映射的复合

设 $f: S \longrightarrow T$ 和 $g: T \longrightarrow U$ 是两个映射. 则我们可

以定义一个新的映射

$$\begin{array}{rccc} \phi: & S & \longrightarrow & U \\ & x & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$

我们称该映射为 f 和 g 的复合*(composition)*, 记为 $g \circ f$. 复合可以通过下列图表形象地表示:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & T \arrow[d, "g"] \\ & U. \end{tikzcd}$$

命题 4.9 *设 $f: S \longrightarrow T$ 和 $g: T \longrightarrow U$ 是两个映射.*

(i) 如果 f 和 g 都是单射, 则 $g \circ f$ 也是单射;

(ii) 如果 f 和 g 都是满射, 则 $g \circ f$ 也是满射;

(iii) 如果 f 和 g 都是双射, 则 $g \circ f$ 也是双射.

证明. (i) 设 $x, y \in S$ 且 $x \neq y$. 因为 f 是单射, 所以 $f(x) \neq f(y)$. 又因为 g 是单射, 所以 $g(f(x)) \neq g(f(y))$. 于是, $g \circ f$ 是单射.

(ii) 设 $z \in U$. 因为 g 是满射, 所以存在 $y \in T$ 使得 $g(y) = z$. 又因为 f 是满射, 所以存在 $x \in S$ 使得 $y = f(x)$. 于是, $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. 故 $g \circ f$ 是满射.

(iii) 是 (i) 和 (ii) 的简单推论. □

设 $f: S \longrightarrow T$ 和 $g: T \longrightarrow S$ 是两个映射. 则 $g \circ f: S \longrightarrow S$ 和 $f \circ g: T \longrightarrow T$ 是两个有意义的映射. 当 $S \neq T$ 时, 这两个映射不同. 事实上, 当 $S = T$ 时, 交换律 $g \circ f = f \circ g$ 也不成立.

例 4.10 设

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad 和 \quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x+1. \end{array}$$

则对任意的 $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(x) = g(x^2) = x^2 + 1$. 而 $f \circ g(x) = f(x+1) = (x+1)^2$. 故 $g \circ f \neq f \circ g$.

例 4.11 设 $f: S \longrightarrow T$ 是映射. 证明 $f \circ \mathrm{id}_S = f$ 和 $\mathrm{id}_T \circ f = f$.

证明. 设 $x \in S$. 则

$$f \circ \mathrm{id}_S(x) = f(\mathrm{id}_S(x)) = f(x).$$

故 $f \circ \mathrm{id}_S = f$. 类似地,

$$\mathrm{id}_T \circ f(x) = \mathrm{id}_T(f(x)) = f(x).$$

故 $\mathrm{id}_T \circ f = f$. $\square$

下面我们证明映射的复合满足结合律.

定理 4.12 设 $f: S \to T$, $g: T \to U$ 和 $h: U \to V$. 则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

证明. 对任意 $x \in S$,

$$h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x)))$$

且

$$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

于是, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. □

映射的结合律可以通过下列交换图形象地表示.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & T \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
& U \arrow[r, "h"] & V.
\end{tikzcd}$$

即通过红色箭头和蓝色箭头把 S 中一个元素映到 V 中同一个元素. 进而, 我们可以把三个函数 f, g, h 的复合写成 $h \circ g \circ f$. 这一简略的写法也适合多个函数的复合. 例如对映射 $\phi : S \longrightarrow S$ 和 $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$\phi^k := \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{k}.$$

此外, $\phi^0 := \mathrm{id}_S$.

4.4 映射的逆

定义 4.13 设 $f : S \longrightarrow T$ 是映射. 如果存在映射 $g : T \longrightarrow S$ 使得 $g \circ f = \mathrm{id}_S$ 且 $f \circ g = \mathrm{id}_T$, 则称 f 是可逆映射, g 称为 f 的一个逆映射.

命题 4.14 映射 $f: S \longrightarrow T$ 可逆当且仅当 f 是双射.

证明. 设 f 可逆且 g 是 f 的一个逆映射. 对任意 $x, y \in S$ 且 $x \neq y$. 我们有

$$g(f(x)) = (g \circ f)(x) = \mathrm{id}_S(x) = x.$$

同理 $g(f(y)) = y$. 因为 $x \neq y$, 所以 $f(x) \neq f(y)$. 故 f 是单射. 再设 $z \in T$. 令 $x = g(z)$. 则

$$f(x) = f(g(z)) = (f \circ g)(z) = \mathrm{id}_T(z) = z.$$

于是, f 是满射. 综上所述, f 是双射.

反之, 设 f 是双射. 则对于任意 $t \in T$ 存在唯一的 $s_t \in S$ 使得 $f(s_t) = t$. 定义

$$\begin{array}{rccc} g: & T & \longrightarrow & S \\ & t & \mapsto & s_t. \end{array}$$

则对任意 $t \in T$, $f \circ g(t) = f(g(t)) = f(s_t) = t$. 故 $f \circ g$=id_T. 对任意 $x \in S$, 令 $t = f(x)$. 则 $x = s_t$. 我们计算:

$$g \circ f(x) = g(t) = s_t = x.$$

故 $g \circ f = \mathrm{id}_S$. $\square$

命题 4.15 设映射 $f: S \longrightarrow T$ 可逆, 则它的逆映射唯一.

证明. 设 g,h 是 f 的两个逆映射. 则 $g\circ f = \mathrm{id}_S$. 于是, $(g\circ f)\circ h = \mathrm{id}_S\circ h = h$. 根据映射的结合律,

$$h = g\circ(f\circ h) = g\circ \mathrm{id}_T = g. \quad \square$$

设映射 $f: S\longrightarrow T$ 可逆. 则它的逆记为 f^{-1}.

命题 4.16 *(i) 设映射 $f: S\to T$ 可逆. 则 $f^{-1}: T\to S$ 也可逆且*

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

(ii) (穿衣脱衣规则) 设映射 $f: S\longrightarrow T$, $g: T\longrightarrow U$ 都可逆. 则 $g\circ f$ 也可逆且

$$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}.$$

证明. (i) 因为 $f\circ f^{-1} = \mathrm{id}_T$ 且 $f^{-1}\circ f = \mathrm{id}_S$, 所以 f^{-1} 可逆且其逆等于 f.

(ii) 由 (i) 可知 $f^{-1}: T\longrightarrow S$ 和 $g^{-1}: U\longrightarrow T$ 存在. 令 $h = f^{-1}\circ g^{-1}$. 它是从 U 到 S 的映射. 根据结合律, 我们有

$$\begin{aligned} h\circ(g\circ f) &= (f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) = f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)\circ f \\ &= f^{-1}\circ \mathrm{id}_T\circ f = f^{-1}\circ(\mathrm{id}_T\circ f) = f^{-1}\circ f = \mathrm{id}_S. \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} (g\circ f)\circ h &= (g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}) = g\circ(f\circ f^{-1})\circ g^{-1} \\ &= g\circ \mathrm{id}_T\circ g^{-1} = g\circ(\mathrm{id}_T\circ g^{-1}) = g\circ g^{-1} = \mathrm{id}_U. \end{aligned}$$

结论成立. $\square$

例 4.17 设 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 由公式 $f(x)=\sin(x)$ 给出. 则

$$\begin{array}{rccc} g: & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

则 g 是双射. 其逆映射是 $\arcsin(x)$.

4.5 集合的势

设 S 和 T 是两个非空集合. 如果存在双射 $f:S\to T$, 则称 S 和 T 是等势的, 记为 $\mathrm{card}(S)=\mathrm{card}(T)$. 此外, 空集的势定义为零. 显然, 如果 S 是有限集，则 T 和 S 等势当且仅当它们的元素个数相同. 与 $\mathbb{Z}^{+}$ 等势的集合称为可数集. 集合论中有以下结论.

(i) 可数集的无限子集一定是可数的.

(ii) 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数的.

(iii) 实数集 $\mathbb{R}$ 是不可数的.

(iv) 设 S 是集合, $\mathcal{P}(S)$ 是所有 S 的子集构成的集合. 则 S 与 $\mathcal{P}(S)$ 不等势.

我们学习的线性代数只涉及到有限集和无限集, 不涉及到无限集的势.

5 等价关系和序关系

5.1 二元关系

定义 5.1 设 S 是一个非空集合, R 是 $S\times S$ 的子集. 我们称 R 称为 S 上的一个二元关系. 如果 $(a,b)\in R$, 则称 a 和 b 有关系 R, 并记为 aRb.

例 5.2 设 $R=\{(x,x)\,|\,x\in S\}$. 则对任意 $a,b\in S$, aRb 当且仅当 $a=b$. 换言之, R 是 S 中的等于关系.

例 5.3 设 L 是 $\mathbb{R}^2$ 中所有直线的集合. 设

$$C=\{(\ell_1,\ell_2)\in L^2\,|\,\ell_1,\ell_2\text{ 有公共点}\}.$$

二元关系 C 代表两直线相交或重合. 设 $P=L^2\setminus C$. 则 $\ell_1 P\ell_2$ 代表 ℓ_1 与 ℓ_2 平行但不重合.

例 5.4 设 $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x\leq y\}$. 则 R 就是实数集上的 $\leq$ 关系.

5.2 等价关系

定义 5.5 设 S 是非空集合, $\sim$ 是 S 上的二元关系. 如果

(i) 对任意 $x\in S$, $x\sim x$ *(*自反性*)*,

(ii) 设 $x,y\in S$ 且 $x\sim y$, 则 $y\sim x$ *(*对称性*)*,

(iii) 设 $x, y, z \in S$, $x \sim y$ 且 $y \sim z$, 则 $x \sim z$ (传递性),

则称 $\sim$ 是等价关系.

例 5.6 例 *5.2* 中的等于是等价关系. 设 T 是 $\mathbb{R}^2$ 中所有三角形的集合. 则三角形全等和相似都是等价关系.

例 5.3 中的关系 C 不满足传递性, 关系 P 不满足自反性, 例 5.4 中的关系 $\leq$ 不满足对称性. 故它们都不是等价关系.

例 5.7 设 S 是中关村中学所有学生的集合, $\sim_c$ 是该集合上同班同学关系. 该关系是等价关系.

设 $x \in \mathbb{Z}$ 和 $m \in \mathbb{Z}^+$. 则存在唯一整数 $q, r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ 使得

$$x = qm + r.$$

我们来验证唯一性. 再设 $x = um + v$, 其中 $u \in \mathbb{Z}$ 和 $v \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. 不妨设 $v \geq r$. 则 $(q-u)m = v - r$. 因为 $m > v - r$, 所以 $v = r$. 由此得出 $q = u$. 我们称 r 是 x 关于 m 的余数, q 是 x 关于 m 的商. 它们分别记为 $\mathrm{rem}(x, m)$ 和 $\mathrm{quo}(x, m)$.

如果存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $x = km$, 则称 m 整除 x. 记为 $m \mid x$.

定义 5.8 设 $m \in \mathbb{Z}^+$. 设 $x, y \in \mathbb{Z}$. 我们称 x 和 y 关于 m 同余, 如果 $m \mid (x - y)$. 记为 $x \equiv_m y$ 或 $x \equiv y \mod m$.

下面我们来验证 $\equiv_m$ 是等价关系.

- (自反性.)对任意 $x \in \mathbb{Z}$, $m|(x-x)$, 于是, $x \equiv_m x$.
- (对称性.) 设 $x, y \in \mathbb{Z}$ 且 $x \equiv_m y$. 则存在 $a \in \mathbb{Z}$ 使得 $(x-y) = am$. 则 $y - x = (-a)m$. 故 $m \mid (y-x)$. 我们得到 $y \equiv_m x$.
- (传递性.) 设 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ 满足 $x \equiv_m y$ 和 $y \equiv_m z$. 则存在 $a, b \in \mathbb{Z}$ 使得 $x - y = am$ 和 $y - z = bm$. 于是, $x - z = (a+b)m$. 故 $x \equiv_m z$.

验证完毕.