第一章　预备知识

命题 5.9 设 $a, b \in \mathbb{Z}$ 且 n 是大于 1 的正整数. 则

$$a \equiv_n b \iff \operatorname{rem}(a, n) = \operatorname{rem}(b, n).$$

证明. 设 $a \equiv_n b$. 则存在 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $a - b = mn$. 由此可知 $a = b + mn$. 设 $b = qn + r$, 其中 $q = \operatorname{quo}(b, n)$ 和 $r = \operatorname{rem}(b, n)$. 则 $a = (q+m)n+r$. 因为 $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, 所以余数的唯一性蕴含 $r = \operatorname{rem}(a, n)$. 故

$$\operatorname{rem}(a, n) = \operatorname{rem}(b, n).$$

反之, 设 $\operatorname{rem}(a, n) = \operatorname{rem}(b, n)$. 则由除法公式可得

$$a - b = (\operatorname{quo}(a, n) - \operatorname{quo}(b, n))n.$$

故 $n|(a - b)$, 即 $a \equiv_n b$. $\square$

5.3　等价类和商集

设 $\sim$ 是 S 上的等价关系, $x \in S$. 则关于 x 的等价类是

$$\bar{x} = \{y \in S | x \sim y\}.$$

此外, $\bar{x}$ 中的任何一个元素都是该等价类的一个代表元.

注解 5.10 设 $\sim$ 是 S 上的等价关系, $x \in S$. 根据自反性, $x \in \bar{x}$.

命题 5.11 设 $\sim$ 是集合 S 上的等价关系, $x, y \in S$.

(i) $x \sim y \Longleftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$.

(ii) $x \nsim y \Longleftrightarrow \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

证明. (i) 设 $x \sim y$ 且 $a \in \bar{x}$. 则 $x \sim a$. 根据对称性, $y \sim x$. 再由传递性, $y \sim a$. 于是, $a \in \bar{y}$. 我们得到 $\bar{x} \subset \bar{y}$. 同理 $\bar{y} \subset \bar{x}$. 故 $\bar{x} = \bar{y}$. 反之, 设 $\bar{x} = \bar{y}$. 根据注释 5.10, $x \in \bar{x}$ 和 $y \in \bar{y}$. 故 $y \in \bar{x}$. 由此得出, $x \sim y$.

(ii) 由 (i) 可知, $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset \Longrightarrow x \nsim y$. 反之, 设 $x \nsim y$. 若 $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. 则 $x \sim z$ 和 $y \sim z$. 根据对称性和传递性, $x \sim y$. 矛盾. $\square$

同学等价关系 $\sim_c$ 对应的等价类是该中学所有的班, 每个同学都是所在班的代表元. 集合 $\mathbb{Z}$ 关于 $\equiv_2$ 共有两个等价类: 偶数集和奇数集. 偶数集可记为 $\bar{0}, \bar{2}, \overline{-2}, \ldots$, 而奇数集的代表元可记为 $\bar{1}, \overline{-1}, \bar{3}, \overline{-3}, \ldots$,

例 5.12 设 $m \in \mathbb{Z}^+$. 则 $\mathbb{Z}$ 关于 $\equiv_m$ 的等价类是

$$\bar{0} = \{km | k \in \mathbb{Z}\}, \ \bar{1} = \{km + 1 | k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\ldots, \ \overline{m-1} = \{km + m - 1 | k \in \mathbb{Z}\}.$$

定义 5.13 设 $\sim$ 是 S 上的等价关系. 关于 $\sim$ 的所有等价

类的集合称为 S 关于 $\sim$ 的商集. 记为 $S/\!\sim$. 映射

$$\begin{aligned} \pi:\ S &\longrightarrow S/\!\sim \\ x &\mapsto \bar{x} \end{aligned}$$

称为关于 $\sim$ 的商映射或自然投射.

注意到商映射是满射. 对于等价关系 $\sim_c$, 其商映射就是判断每位同学是哪个班的. 对于 $\equiv_2$, 其商映射就是判断每个整数的奇偶性.

5.4 集合的划分

定义 5.14 *设 S 是非空集, $\mathcal{P}$ 是 S 中一些非空子集组成的集合(有限或无限). 如果*

(i) 对任意不相等的 $U, V \in \mathcal{P}$, $U \cap V = \emptyset$,

(ii) $S = \bigcup_{U \in \mathcal{P}} U$,

则称 $\mathcal{P}$ 是 S 的一个划分 (partition).

设 $\sim$ 是 S 上的等价关系. 根据命题 5.11 和等价关系的自反性, $S/\!\sim$ 是 S 的一个划分. 反之, 设 $\mathcal{P}$ 是 S 的一个划分. 我们定义 S 上的二元关系 $\sim_{\mathcal{P}}$ 如下: 对 $x, y \in S$, 如果存在 $U \in \mathcal{P}$ 使得 $x, y \in U$, 则 $x \sim_{\mathcal{P}} y$.

下面我们来验证 $\sim_{\mathcal{P}}$ 是等价关系. 由定义 5.14 中的条件 (ii) 可知, 对任意 $x \in S$, 存在 $U \in \mathcal{P}$ 使得 $x \in U$. 于

是, $x \sim_{\mathcal{P}} x$. 自反性成立. 设 $x \sim_{\mathcal{P}} y$. 则存在 $U \in \mathcal{P}$ 使得 $x, y \in U$. 故 $y, x \in U$. 于是, $y \sim_{\mathcal{P}} x$. 对称性成立. 设 $x \sim_{\mathcal{P}} y$ 和 $y \sim_{\mathcal{P}} z$. 则存在存在 $U, V \in \mathcal{P}$, 使得 $x, y \in U$ 和 $y, z \in V$. 于是, $y \in U \cap V$. 由定义 5.14 中的条件 (ii) 可知, $U = V$. 故 $x, z \in U$. 从而, $x \sim_{\mathcal{P}} z$. 传递性成立. 称 $\sim_{\mathcal{P}}$ 是由划分 $\mathcal{P}$ 诱导的等价关系.

根据命题 5.11, 对于给定的集合 S 上的等价关系 $\sim$, 划分 $S/\sim$ 诱导的等价关系就是 $\sim$.

反之, 对于给定的集合 S 的划分 $\mathcal{P}$, 其诱导等价关系的商集 $S/\sim_{\mathcal{P}}$ 就是 $\mathcal{P}$. 验证如下:

先验证 $S/\sim_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$. 设 $U \in S/\sim_{\mathcal{P}}$. 则存在 $x \in S$ 使得 $U = \bar{x}$, 且存在 $V \in \mathcal{P}$ 使得 $x \in V$. 我们来证明 $U = V$. 设 $y \in U$. 则 $y \in \bar{x}$. 即 $y \sim_{\mathcal{P}} x$. 故存在 $W \in \mathcal{P}$ 使得 $x, y \in W$. 于是, $x \in V \cap W$. 由分划的定义可知 $V = W$. 于是, $y \in V$. 我们得到 $U \subset V$. 反之, 设 $y \in V$. 则 $y \in V$. 故 $y \in \bar{x} = U$. 由此得出 $U = V$. 从而, $U \in \mathcal{P}$. 关系 $S/\sim_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$ 成立.

再验证 $\mathcal{P} \subset S/\sim_{\mathcal{P}}$. 设 $U \in \mathcal{P}$. 因为 U 非空, 所以可设 $x \in U$. 我们来验证 $U = \bar{x}$. 设 $y \in U$. 则 $y \sim_{\mathcal{P}} x$. 故 $y \in \bar{x}$. 我们有 $U \subset \bar{x}$. 反之, 设 $y \in \bar{x}$. 则 $y \sim_{\mathcal{P}} x$. 故存在 $W \in \mathcal{P}$ 使得 $x, y \in W$. 与上段推理类似可得 $U = W$. 于是, $y \in U$. 从而得出 $\bar{x} \subset U$. 故$U = \bar{x} \in S/\sim_{P}$. 关系

$\mathcal{P} \subset S/\sim_{\mathcal{P}}$ 成立.

综上所述, 结论 $S/\sim_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ 成立.

因此, 等价关系通过其商集对集合分类, 而商映射意味着对集合中的元素归类. 另一方面, 对集合元素进行分类(划分)就是在集合上引入一个等价关系.

例 5.15 设 $S = [0,3] \times [0,1]$. 令

$$\begin{aligned}\mathcal{P} =& \{\{(x,y)\} \mid (x,y) \in S \text{ 且 } 0 < x < 3\} \\ & \cup \{\{(0,y),(3,y)\} \mid 0 \leq y \leq 1\}.\end{aligned}$$

则 $S/\sim_{\mathcal{P}}$ 是一个圆柱. 令

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} =& \{\{(x,y)\} \mid (x,y) \in S \text{ 且 } 0 < x < 3\} \\ & \cup \{\{(0,y),(3,1-y)\} \mid 0 \leq y \leq 1\}.\end{aligned}$$

则 $S/\sim_{\mathcal{Q}}$ 是 $M\ddot{o}bius$ 带.

5.5 映射分解定理

定义 5.16 设 $f : S \longrightarrow T$ 是映射. 如果 $f(x) = f(y)$, 则记 $x \sim_f y$. 称 $\sim_f$ 是由 f 诱导的等价关系.

我们来验证 $\sim_f$ 是等价关系. 对任意 $x \in S$, $f(x) = f(x)$. 于是, $x \sim_f x$. 自反性成立. 设 $x \sim_f y$. 则 $f(x) = f(y)$. 故 $f(y) = f(x)$. 于是, $y \sim_f x$. 对称性成立. 设 $x \sim_f y$ 和

$y \sim_f z$. 则 $f(x)=f(y)$ 且 $f(y)=f(z)$. 故 $f(x)=f(z)$. 于是, $x \sim_f z$. 传递性成立. 验证完毕.

例 5.17 设

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}.$$

则 $\mathbb{R}^2$ 中两点关于 $\sim_f$ 等价当且仅当这两点在以原点为圆心的同心圆上. 而 $\mathbb{R}^2/\sim_f$ 是以原点为圆心的所有圆构成的集合.

定理 5.18 设 $f: S \longrightarrow T$ 是映射, π 是关于 $\sim_f$ 的商映射. 则存在唯一的映射 $\bar{f}: S/\sim_f \longrightarrow T$ 使得 $f=\bar{f}\circ\pi$, 且该映射是单射.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & T \\ & (S/\sim_f) \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

证明. 设:

$$\begin{array}{cccc} \bar{f}: & S/\sim_f & \longrightarrow & T \\ & \bar{x} & \mapsto & f(x). \end{array}$$

因为 $\bar{x}$ 可能有不同的代表元, 所以我们需要验证 $\bar{f}$ 是良定义的. 设 $\bar{x}=\bar{y}$. 根据命题 5.11, $x \sim_f y$. 即 $f(x)=f(y)$. 故 $\bar{f}(\bar{x})=\bar{f}(\bar{y})$. 于是, $\bar{f}$ 是良定义的.

对任意 $x \in S$, $\bar{f} \circ \pi(x) = \bar{f}(\bar{x}) = f(x)$. 故 $f = \bar{f} \circ \pi$. 存在性成立.

再设 $g : S/\!\sim_f \longrightarrow T$ 是映射使得 $f = g \circ \pi$. 则对于任意 $x \in S$,

$$f(x) = g \circ \pi(x) \implies g(\bar{x}) = f(x) = \bar{f}(\bar{x}).$$

即 $g = \bar{f}$. 唯一性成立.

设 $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{y})$. 则 $f(x) = f(y)$. 故 $x \sim_f y$. 根据命题 5.11 (i), $\bar{x} = \bar{y}$. 故 $\bar{f}$ 是单射. □

例 5.19 设 S 是某中学全体学生的集合, T 是该中学全体老师的集合. 定义:

$$\begin{array}{rccl} f: & S & \longrightarrow & T \\ & x & \mapsto & x \text{ 的班主任}. \end{array}$$

则 $\sim_f$ 是关于同学的等价关系 $\sim_c$. 商集 $S/\!\sim_f$ 是该中学所有的班. 而诱导映射 $\bar{f}$ 把班映到班主任, 它显然是单射. □

例 5.20 设 $m \in \mathbb{Z}^+$. 定义:

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \mapsto & \mathrm{rem}(x, m). \end{array}$$

则 $\sim_r$ 是关于 m 的同余关系. 商集 $S/\!\sim_r$ 是集合

$$\{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{m-1}\}.$$

而诱导映射 $\bar{r}$ 把 $\bar{x}$ 映到 $\bar{x}$ 最小的非负代表元 $\mathrm{rem}(x, m)$, 它显然是单射. $\square$

5.6 序关系

定义 5.21 设 $\preceq$ 是集合 S 上的二元关系. 如果

(i) 对任意 $x \in S$, $x \preceq x$ (自反性),

(ii) 如果 $x, y \in S$ 且 $x \preceq y$ 和 $y \preceq x$, 则 $y = x$ (反对称性),

(iii) 如果 $x, y, z \in S$, $x \preceq y$ 且 $y \preceq z$, 则 $x \preceq z$ (传递性),

则称 $\preceq$ 是偏序. 进而, 设 $\preceq$ 是 S 上的偏序. 如果对任意 $x, y \in S$, 我们有 $x \preceq y$ 或 $y \preceq x$. 则称 $\preceq$ 是全序.

例 5.22 在实数集上, $\leq$ 和 $\geq$ 都是全序. 设 S 是非空集合, T 是 S 中所有子集的集合. 则 $\subset$ 和 $\supset$ 是 T 上的偏序关系.