第二章　矩阵

1.3　坐标空间中的子空间

定义 1.14 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空子集. 如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$,

(i) *(加法封闭性)* $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$,

(ii) *(数乘封闭性)* $\alpha \mathbf{x} \in U$.

则称 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间*(subspace)*.

例 1.15 坐标空间 $\mathbb{R}^n$ 有两个平凡的子空间 $\{\mathbf{0}\}$ 和 $\mathbb{R}^n$.

例 1.16 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 则 $\mathbf{0} \in U$.

证明. 设 $\mathbf{x} \in U$. 则 $\mathbf{0} = 0\mathbf{x} \in U$. $\square$

命题 1.17 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空子集. 则下列命题等价.

(i) U 是子空间;

(ii) U 中任意两个向量的线性组合仍在 U 中;

(iii) 对任意 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in U$, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ 的任意线性组合都在 U 中.

证明. “(i) $\Longrightarrow$ (ii)” 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 是 U 中任意的两个向量, α,β 是任意两个实数. 如果 U 是子空间, 则 $\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}\in U$ (数乘封闭性). 从而 $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\in U$ (加法封闭性). 反之, 设 $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\in U$. 取 $\alpha=\beta=1$ 得到加法封闭性, 取 $\beta=0$ 得到数乘封闭性. 故 U 是子空间.

“(ii) $\Longrightarrow$ (iii)” 当 $k=1,2$ 时, (ii) 蕴含 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ 的所有线性组合都在 U 中. 设 $k>2$ 时且 U 中任何 $k-1$ 个向量的线性组合都在 U 中. 对任意 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},\alpha_k\in\mathbb{R}$, $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{k-1},\mathbf{u}_k\in U$, 我们有

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{u}_i=\left(\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\mathbf{u}_i\right)+\alpha_k\mathbf{u}_k\in U.$$

“(iii) $\Longrightarrow$ (i)” 由线性组合的定义直接得出. □

例 1.18 设 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$. 则 $\{\lambda\mathbf{v}\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$ 是子空间.

设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$. 则 $\{\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\,|\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ 是子空间.

例 1.19 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 其对应的 n 元齐次线性方程组记为 H. 验证 $\mathrm{sol}(H)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间.

证明. 设

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

是 H 的两个解. 则

$$\alpha_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\alpha_n\vec{A}^{(n)}=\mathbf{0}_m,\quad \beta_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\beta_n\vec{A}^{(n)}=\mathbf{0}_m.$$

令 λ, μ 是两个实数, $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$. 则

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_1 + \mu\beta_n \end{pmatrix}.$$

而

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda\alpha_j+\mu\beta_j)\vec{A}^{(j)} = \lambda\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\vec{A}^{(j)}\right)+\mu\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\vec{A}^{(j)}\right) = \mathbf{0}_m.$$

故 $\mathbf{u} \in \mathrm{sol}(H)$. 根据命题 *1.17*, $\mathrm{sol}(H)$ 是子空间. $\square$

例 1.20 设 $p, q \in \mathbb{Q}$ 不全为零,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid p\alpha + q\beta = 0, \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\}.$$

S 是否是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间?

答. 不是. 因为

$$\begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} \in S \quad \text{但} \quad \sqrt{2}\begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} \notin S. \quad \square$$

命题 1.21 设 Λ 是一个指标集, 对任意 $\lambda \in \Lambda$, U_λ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间. 则 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ 也是子空间.

证明. 设 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 因为 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U_\lambda$, 所以 $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in U_\lambda$ (命题 1.17). 由此可知, $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. 故 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ 是子空间(命题 1.17). $\square$

例 1.22 考虑齐次线性方程组 H

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

设 $V_i = \mathrm{sol}(a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = 0)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. 则 $\mathrm{sol}(H) = \cap_{i=1}^m V_i$. □

设 $S_1, \ldots, S_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集. 我们定义 $S_1, \ldots, S_k$ 的和为

$$S_1 + \cdots + S_k := \{\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k | \mathbf{v}_1 \in S_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in S_k\}.$$

命题 1.23 设 $U_1, \ldots, U_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 则 $U_1 + \cdots + U_k$ 也是子空间.

证明. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \sum_{i=1}^k U_i$. 则存在 $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \in U_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, 使得 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i$ 和 $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i$. 则对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \alpha\left(\sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i\right) + \beta\left(\sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^k (\alpha\mathbf{u}_i + \beta\mathbf{v}_i).$$

根据命题 1.17, $\alpha\mathbf{u}_i + \beta\mathbf{v}_i \in U_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 我们得到 $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \sum_{i=1}^k U_i$. 故 $\sum_{i=1}^k U_i$ 是子空间. □

例 1.24 设 $U_1, \ldots, U_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 证明

$$U_i \subset U_1 + \cdots + U_k, \quad i = 1, \ldots, n.$$

证明. 不妨证明 $U_1 \subset U_1 + \cdots + U_k$. 注意到

$$U_1 = \{\mathbf{u}_1 + \underbrace{\mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0}}_{k-1} \mid \mathbf{u}_1 \in U_1\} \subset U_1 + \cdots + U_k. \quad \square$$

例 1.25 设 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 如果 $U \subsetneq V$ 且 $V \subsetneq U$, 则 $U \cup V$ 不是子空间.

证明. 假设 $U \cup V$ 是子空间. 设 $\mathbf{x} \in U \setminus V$ 和 $\mathbf{y} \in V \setminus U$. 则 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U \cup V$. 不妨设 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$. 则

$$\mathbf{y} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathbf{x} \in U.$$

矛盾. $\square$

定义 1.26 设 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 和 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 则 $\{\mathbf{v}\} + U$ 简记为 $\mathbf{v} + U$. 称为一个线性流形.

例 1.27 设 $B \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$, L 是 B 对应的 n 元线性方程组, H 是 B 的前 n 列组成矩阵对应的齐次线性方程组. 如果 L 相容, 则 $\mathrm{sol}(L) = \mathbf{v} + \mathrm{sol}(H)$, 其中 $\mathbf{v}$ 是 L 的一个解. 特别地, $\mathrm{sol}(L)$ 是线性流形.

证明. 设 $M = \mathbf{v} + \mathrm{sol}(H)$ 且 $\mathbf{w} \in M$. 则存在 $\mathbf{z} \in \mathrm{sol}(H)$ 使得 $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{z}$. 令

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

则

$$\mathbf{w}=\begin{pmatrix}v_1+z_1\\ \vdots\\ v_n+z_n\end{pmatrix}.$$

我们计算

$$\sum_{i=1}^{n}(v_i+z_i)\vec{B}^{(i)}=\sum_{i=1}^{n}v_i\vec{B}^{(i)}+\sum_{i=1}^{n}z_i\vec{B}^{(i)}=\vec{B}^{(n+1)}.$$

于是, $\mathbf{w}\in\mathrm{sol}(L)$. 由此可知, $M\subset\mathrm{sol}(L)$. 再设:

$$\mathbf{w}=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}\in\mathrm{sol}(L).$$

则 $\mathbf{w}=\mathbf{v}+(\mathbf{w}-\mathbf{v})$. 我们计算

$$\sum_{i=1}^{n}(w_i-v_i)\vec{B}^{(i)}=\sum_{i=1}^{n}w_i\vec{B}^{(i)}-\sum_{i=1}^{n}v_i\vec{B}^{(i)}=\vec{B}^{(n+1)}-\vec{B}^{(n+1)}=\mathbf{0}_m.$$

故 $\mathbf{w}-\mathbf{v}\in\mathrm{sol}(H)$. 我们有 $\mathrm{sol}(L)\subset M$. 故 $\mathrm{sol}(L)=M$. 再根据上一讲例 *1.18*, $\mathrm{sol}(L)$ 是线性流形. □

引理 1.28 设线性流形 $M=\mathbf{x}+U=\mathbf{y}+V$, 其中 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$, U,V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 则 $U=V$ 且 $\mathbf{x}-\mathbf{y}\in U$.

证明. 因为 $\mathbf{x}+\mathbf{0}\in M$, 所以存在 $\mathbf{v}\in V$ 使得 $\mathbf{x}=\mathbf{y}+\mathbf{v}$. 于是, $\mathbf{x}-\mathbf{y}\in V$. 类似可知 $\mathbf{y}-\mathbf{x}\in U$. 我们得到

$$\pm(\mathbf{x}-\mathbf{y})\in U\cap V. \tag{1}$$

设 $\mathbf{u} \in U$. 则 $\mathbf{x} + \mathbf{u} \in M$. 于是, 存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得

$$\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{y} + \mathbf{v}.$$

由 (1) 可知, $\mathbf{u} = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \mathbf{v}$. 故 $\mathbf{u} \in V$. 我们得到 $U \subset V$. 同理 $V \subset U$. 故 $U = V$. 进而, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in U \cap V = U$. $\square$

设线性流形 $M = \mathbf{x} + U$, 其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 我们称 U 是 M 的方向.

注解 1.29 一个线性流形是子空间当且仅当它含有零向量. 这是因为该流形可以写成零向量和它的方向之和.

定义 1.30 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集. 则由 S 中元素的所有线性组合构成的集合称为由 S 生成的子空间. 记为 $\langle S \rangle$. 集合 S 中的元素称为子空间 $\langle S \rangle$ 的一组生成元.

命题 1.31 *设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集.*

(i) $\langle S \rangle$ 是子空间;

(ii) 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间且 $S \subset U$. 则 $\langle S \rangle \subset U$.

证明. (i) 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle S \rangle$. 则存在 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in S$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_\ell \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{u}_i \quad \text{和} \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j \mathbf{v}_j.$$

则对任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y} = \lambda\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{u}_i\right)+\mu\left(\sum_{j=1}^{\ell}\beta_j\mathbf{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{k}(\lambda\alpha_i)\mathbf{u}_i+\sum_{j=1}^{\ell}(\mu\beta_j)\mathbf{v}_j.$$

故 $\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y} \in \langle S\rangle$. 根据第二章第一讲命题 1.16, $\langle S\rangle$ 是子空间.

(ii) 因为 $S \subset U$, 所以 $\langle S\rangle \subset U$ (第二章第一讲命题 1.16). □

当 S 是有限集 $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ 时, $\langle S\rangle$ 也记作 $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\rangle$.

例 1.32 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. 则

$$\langle \mathbf{v}\rangle = \{\lambda\mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{和} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \{\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

例 1.33 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2$, $V_1 = \langle \mathbf{e}_1\rangle$, $V_2 = \langle \mathbf{e}_2\rangle$ 和 $V_3 = \langle \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\rangle$. 计算 $(V_1+V_2)\cap V_3$ 和 $V_1\cap V_3+V_2\cap V_3$.

解. 注意到 $V_1+V_2 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle = \mathbb{R}^2$. 故 $(V_1+V_2)\cap V_3 = V_3$. 而$V_1\cap V_3 = V_2\cap V_3 = \{\mathbf{0}\}$. 我们有

$$V_1\cap V_3+V_2\cap V_3 = \{\mathbf{0}\}+\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}.$$

例 1.34 设 U, W 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间. 则 $U+W = \langle U\cup W\rangle$.

证明. 显然 $U\cup W \subset U+W$. 根据命题 *1.31 (ii)*,

$$\langle U\cup W\rangle \subset U+W.$$

反之, 设 $\mathbf{x} \in U+W$. 则存在 $\mathbf{u} \in U$ 和 $\mathbf{w} \in W$ 使得 $\mathbf{x} = \mathbf{u}+\mathbf{w}$. 于是, $\mathbf{x} \in \langle U\cup W\rangle$, 即 $U+W\subset\langle U\cup W\rangle$. □

定义 1.35 设 U, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 如果 $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, 则称 $U + W$ 是直和. 记为 $U \oplus W$.

命题 1.36 设 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 中子空间. 则 $U + V$ 是直和当且仅当对任意 $\mathbf{x} \in U + V$, 存在唯一的 $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{v} \in V$ 使得

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}.$$

证明. 设 $U + V$ 是直和且 $\mathbf{x} \in U + V$. 设

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}',$$

其中 $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$, $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$. 则

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}' = \mathbf{v}' - \mathbf{v} \implies \mathbf{u} - \mathbf{u}' \in U \cap V.$$

因为 $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$, 所以 $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$. 进而 $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$.

反之, 假设 $U + V$ 不是直和. 则存在非零向量 $\mathbf{x} \in U \cap V$. 故 $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{x} + (-\mathbf{x})$. 与要求的唯一性矛盾. $\square$