

第二章 矩阵

2 子空间的基底和维数

2.1 极大线性无关组

例 2.1 设 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^n$ 且 $m > n$. 则 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ 线性相关.

证明. 因为 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ 都是 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 的线性组合, 所以根据线性组合引理和 $m > n$ 可知, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ 线性相关. \square

定义 2.2 设 $S \subset \mathbb{R}^n$. 有限非空子集 $T \subset S$ 称为 S 的一个极大线性无关组. 如果

(i) T 中的向量线性无关;

(ii) 对任意 $\mathbf{v} \in S, \mathbf{v} \in \langle T \rangle$.

注解 2.3 如果 S 的一个极大线性无关组 $T = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$. 我们经常略去集合符号简称 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 S 的一个极大线性无关组.

命题 2.4 设 $S \subset \mathbb{R}^n$.

(i) (可扩充性) 设 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ 是 S 中线性无关的向量. 则存在 S 中极大线性无关组且它包含 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

(ii) (等势性) 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell \in S$ 线性无关, $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ 是 S 的极大线性无关组. 则 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell$ 是 S 的极大线性无关组当且仅当 $\ell = m$.

证明. (i) 如果对任意 $\mathbf{u} \in S$, $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ 线性相关, 则 $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ (第五讲命题 1.11 (iv)). 于是, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ 是 S 中的一个极大线性无关组且它包含 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$. 否则, 存在 $\mathbf{u}_{k+1} \in S$ 使得 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}$ 线性无关. 对向量 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}$ 重复上述推理过程, 我们要么得出 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}\}$ 是 S 的极大线性无关组, 要么证明存在向量 $\mathbf{u}_{k+2} \in S$ 使得 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}$ 线性无关. 由例 2.1 可知, S 中不可能有 $n+1$ 个线性无关的向量. 故上述推理过程重复有限步后, 我们就会得到一个 S 中的极大线性无关组且它包含 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

(ii) 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell$ 是 S 的极大线性无关组. 因为

$$\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell \rangle,$$

所以 $m \leq \ell$ (线性组合引理). 同理可知, $\ell \leq m$.

反之, 设 $\ell = m$. 由 (i) 可知, S 有一个极大线性无关组

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_{m+s}$$

由极大线性无关组的定义可知 $\mathbf{v}_i \in \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \rangle$, $i = 1, 2, \dots, m+s$. 假设 $s > 0$. 根据线性组合引理, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$,

$\mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_{m+s}$ 线性相关, 矛盾. 故 $s = 0$. 即 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ 是 S 的极大线性无关组. \square

注解 2.5 由上述命题可知, 任何含有非零向量的集合必有极大线性无关组.

例 2.6 向量 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组极大线性无关组.

例 2.7 证明 $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一个极大线性无关组.

证明. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \alpha_2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + \alpha_3\mathbf{e}_3 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

则

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{e}_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 线性无关, 所以 $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0, \dots, \alpha_n = 0$. 故 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. 于是,

$$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n$$

线性无关. 由命题 2.4 (ii) 可知, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一个极大线性无关组.

2.2 子空间的基底

定义 2.8 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间且 $U \neq \{\mathbf{0}\}$. 向量集 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\} \subset U$ 称为 U 的一组基, 如果对任意 $\mathbf{u} \in U$, 存在唯一的 $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$, 使得 $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_d \mathbf{u}_d$.

如注解 2.3 所述, 当 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$ 是子空间 U 的一组基时, 我们也简称 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 U 的一组基.

命题 2.9 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间且 $U \neq \{\mathbf{0}\}$. 向量集 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$ 是 U 的一组基当且仅当该向量集是 U 的极大线性无关组.

证明. 设 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$ 是 U 的基. 再设 $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_d \mathbf{u}_d = \mathbf{0}.$$

由基底定义可知, $\alpha_1 = \dots = \alpha_d = 0$. 故 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 线性无关. 再由基底定义中条件 (ii) 可知, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 U 的极大线性无关组.

反之, 设 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 U 的一个极大线性无关组. 根据第五讲命题 1.12 (iv), $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 U 的一组基. \square

由例 2.6 可知, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 \mathbb{R}^n 中的一组基. 称之为 \mathbb{R}^n 的标准基.

推论 2.10 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 包含非零向量. 则 S 中的极大线性无关组是 $\langle S \rangle$ 的一组基.

证明. 设 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 S 的一个极大线性无关组. 则

$$S \subset \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d \rangle.$$

由第五讲命题 1.25, $\langle S \rangle \subset \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d \rangle$. 而另一个方向的包含关系是显然的. 于是, $\langle S \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d \rangle$. 即 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 $\langle S \rangle$ 的极大线性无关组. 根据上述命题, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 $\langle S \rangle$ 的一组基. \square

例 2.11 设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

求 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ 的一组基.

解. 根据上述推论, 我们只要求出 $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ 中的一个极大线性无关组即可.

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, 以矩阵 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) 为系数矩阵的齐次线性方程组只有平凡解. 故 \mathbf{x}, \mathbf{y} 线性无关. 由第二章第 1.2 节例 1.10, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ 线性相关. 故 \mathbf{x}, \mathbf{y} 是 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ 的一组基. 类似地可知, \mathbf{x}, \mathbf{z} 和 \mathbf{y}, \mathbf{z} 都是 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ 的基

定理 2.12 (基扩充定理) 设 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ 是子空间 U 中线性无关的向量. 则 U 有一组基包含 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

证明. 根据命题 2.4 (i), U 中有极大线性无关组包含 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$. 再根据上述命题, 该极大线性无关组是 U 的一组基. \square

2.3 维数

定义 2.13 设 U 是 \mathbb{R}^n 中的子空间. 如果 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 U 的一组基, 则 U 的维数 (*dimension*) 定义为 d . 当 $U = \{\mathbf{0}\}$ 时, 其维数定义为 0. 该维数记为 $\dim(U)$.

根据命题 2.4 (ii) 和命题 2.9, 子空间维数是良定义的. 因为坐标空间 \mathbb{R}^n 有标准基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, 所以 $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

命题 2.14 设 U, W 是 \mathbb{R}^n 的两个子空间且 $U \subset W$. 则 $\dim(U) \leq \dim(W)$. 进而, $U=W$ 当且仅当 $\dim(U) = \dim(W)$.

证明. 设 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 是 U 的一组基. 由假设 $U \subset W$ 和基扩充定理 2.12, W 有一组基包含 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$. 故 $\dim(U) \leq \dim(W)$.

再设 $d = \dim(W)$. 则 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ 也是 W 的基(命题 2.4 (ii)). 故 $W \subset \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d \rangle = U$. \square

命题 2.15 设 U, W 是 \mathbb{R}^n 的两个子空间. 则

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W).$$

证明. 令 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 是 $U \cap W$ 的一组基. 由基扩充定理, U 有基底 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_{k+\ell}$; W 有基底 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_{k+m}$.

断言. $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_{k+\ell}, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_{k+m}\}$ 是 $U + W$ 的一组基.

断言的证明. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_\ell, \gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k + \beta_1 \mathbf{u}_{k+1} + \dots + \beta_\ell \mathbf{u}_{k+\ell} + \underbrace{\gamma_1 \mathbf{w}_{k+1} + \dots + \gamma_m \mathbf{w}_{k+m}}_{\mathbf{w}} = \mathbf{0}.$$

则 $\mathbf{w} \in U \cap W$. 于是, 存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k.$$

即

$$(-\gamma_1) \mathbf{w}_1 + \dots + (-\gamma_m) \mathbf{w}_m + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性无关, 所以

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0.$$

故

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k + \beta_1 \mathbf{u}_{k+1} + \dots + \beta_\ell \mathbf{u}_{k+\ell} = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\ell, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性无关, 所以 $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_\ell = 0$. 于是, S 中的向量线性无关.

再设 $\mathbf{x} \in U + W$. 则存在 $\mathbf{y} \in U$ 和 $\mathbf{z} \in W$ 使得 $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$. 因为 \mathbf{y} 是 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_{k+\ell}$ 的线性组合, \mathbf{z} 是 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_{k+m}$ 的线性组合. 故 \mathbf{x} 是 S 中的向量的线性组合. 即 S 是 $U + W$ 的一个极大线性无关组. 根据命题 2.9, 断言成立.

由断言可知 $\dim(U + W) = k + \ell + m$. 因为

$$\dim(U \cap W) = k, \dim(U) = k + \ell, \dim(W) = k + m,$$

所以

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W). \quad \square$$

注解 2.16 在上述命题证明中, 当 $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, 则集合 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ 是空集, 即 $k = 0$.

例 2.17 设 $U, W \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间, $\dim(U) = d > 0$, $\dim(W) = n - 1$.

证明 $\dim(U \cap W) \geq d - 1$.

证明. 由维数公式可知:

$$\begin{aligned} \dim(U \cap W) &= \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) \\ &\geq d + n - 1 - n \quad (\because \dim(U + W) \leq n) \\ &= d - 1. \end{aligned}$$

命题 2.18 设 $V, W \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间. 证明 $V + W$ 是直和当且仅当 $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W)$.

证明. 由维数公式可知

$$\begin{aligned}\dim(V + W) &= \dim(V) + \dim(W) \\ &\iff \dim(U \cap W) = 0 \\ &\iff U \cap W = \{\mathbf{0}\}. \quad \square\end{aligned}$$

3 矩阵的秩

3.1 初等变换下的不变量

定义 3.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 由 A 的行向量 $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m$ 在行空间 $\mathbb{R}^{1 \times n}$ 中生成的子空间称为 A 的行空间. 记为 $V_r(A)$. 由 A 的列向量 $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}$ 在列空间 \mathbb{R}^m 中生成的子空间称为 A 的列空间. 记为 $V_c(A)$. 矩阵 A 的行秩是 $\dim(V_r(A))$, 列秩是 $\dim(V_c(A))$.

本节的主要结论是一个矩阵的行秩等于列秩.

引理 3.2 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是通过一次初等行变换得到的. 则 $V_r(A) = V_r(B)$. 特别地, A 和 B 的行秩相同.

证明. 当 B 是由 A 通过一次第一类初等行变换得到的, 则 A 和 B 有共同的行向量. 故 $V_r(A) = V_r(B)$.

当 B 是由 A 通过一次第二类初等行变换得到的, 设 $\vec{A}_k = \vec{B}_k, k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m$, 而 $\vec{B}_j = \vec{A}_j + \lambda \vec{A}_i$, 其中 $i \neq j$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$. 则 B 的所有行向量在 $V_r(A)$ 中. 故 $V_r(B) \subset V_r(A)$ (第二章命题 1.31 (ii)). 因为 $i \neq j$, 所以 $\vec{A}_i = \vec{B}_i$. 故 $\vec{A}_j = \vec{B}_j - \lambda \vec{B}_i$. 由此可知, A 的行向量都在 $V_r(B)$ 中. 同样的命题蕴含 $V_r(A) \subset V_r(B)$.

当 B 是由 A 通过一次第三类初等行变换得到的, 设 $\vec{A}_k = \vec{B}_k, k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m$, 而 $\vec{B}_j = \lambda \vec{A}_j$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 则 B 的所有行向量在 $V_r(A)$ 中. 故 $V_r(B) \subset V_r(A)$ (第二章命题 1.31 (ii)). 因为 $\lambda \neq 0$, 所以 $\vec{A}_j = \lambda^{-1} \vec{B}_j$. 故 A 的行向量都在 $V_r(B)$ 中. 同样的命题蕴含 $V_r(A) \subset V_r(B)$. \square

在矩阵中互换两列的位置称为第一类初等列变换, 把一列通乘一个实数加到另一列上称为第二类初等列变换, 把一列通乘一个非零实数称为第三类初等列变换. 它们统称为初等列变换. 类似引理 3.2, 我们有

引理 3.3 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 设 $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是通过一次初等列变换得到的. 则 $V_c(A) = V_c(B)$. 特别地, A 和 B 的列秩相同.

初等行变换和列变换统称为矩阵的初等变换.

例 3.4 第二类初等行变换得:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: B.$$

注意到 $V_c(A) \neq V_c(B)$.

一个不显然的结论是:

引理 3.5 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 设 $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是通过一次初等行变换得到的. 则 A 和 B 的列秩相同.

证明. 设以 A 和 B 为系数矩阵的齐次线性方程组分别是 H_A 和 H_B . 即:

$$H_A: \sum_{j=1}^n x_j \vec{A}^{(j)} = \mathbf{0}_m \text{ 和 } H_B: \sum_{j=1}^n x_j \vec{B}^{(j)} = \mathbf{0}_m.$$

则 H_A 和 H_B 同解(第一章第一讲命题 2.2). 不妨设 $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(r)}$ 是 A 中列向量的极大线性无关组.

断言. $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(r)}$ 线性无关.

断言的证明. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1 \vec{B}^{(1)} + \dots + \alpha_r \vec{B}^{(r)} = \mathbf{0}_m.$$

则

$$\alpha_1 \vec{B}^{(1)} + \dots + \alpha_r \vec{B}^{(r)} + 0\vec{B}^{(r+1)} + \dots + 0\vec{B}^{(n)} = \mathbf{0}_m.$$

换言之, 列向量

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

是方程组 H_B 的一个解. 故它也是 H_A 的一个解. 即

$$\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_r \vec{A}^{(r)} + 0 \vec{A}^{(r+1)} + \cdots + 0 \vec{A}^{(n)} = \mathbf{0}_m.$$

我们得到

$$\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_r \vec{A}^{(r)} = \mathbf{0}_m.$$

因为 $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(r)}$ 线性无关, 所以 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. 于是, $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(r)}$ 线性无关. 断言成立.

设 $j \in \{r+1, \dots, n\}$. 则存在 $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{R}$ 使得 $\vec{A}^{(j)} = \beta_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \beta_r \vec{A}^{(r)}$. 这是因为 $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(r)}$ 是 A 中列向量的极大线性无关组. 我们得到

$$\begin{aligned} & \beta_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \beta_r \vec{A}^{(r)} \\ & + 0 \vec{A}^{(r+1)} + \cdots + 0 \vec{A}^{(j-1)} + (-1) \vec{A}^{(j)} \\ & + 0 \vec{A}^{(j+1)} + \cdots + 0 \vec{A}^{(n)} = \mathbf{0}_m. \end{aligned}$$

换言之, 列向量

$$j \rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

是 H_A 的解. 于是, 它也是 H_B 的解. 我们有

$$\vec{B}^{(j)} = \beta_1 \vec{B}^{(1)} + \cdots + \beta_r \vec{B}^{(r)}.$$

再根据断言可知 $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(r)}$ 是 B 中列向量的极大线性无关组. 由推论 2.10 可知,

$$\dim(V_c(A)) = r = \dim(V_c(B)). \quad \square$$

3.2 矩阵的秩

例 3.6 设阶梯型矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中 \bullet 代表非零实数, $*$ 代表实数. 设 M 的前 k 个行向量非零, 其它行向量都是零向量. 证明: M 的行秩和列秩都等于 k .

证明. 先证明 M 的行秩等于 k . 对 k 归纳. 当 k 等于 0 和 1 时, 结论显然成立. 设 $k > 1$ 且结论对 $k-1$ 成立. 则把 M 去掉第一行得到的矩阵的行秩是 $k-1$. 即 $\vec{M}_2, \dots, \vec{M}_k$ 线性无关. 设 \vec{M}_1 中第一个非零元素出现在第 ℓ 列. 则 $\vec{M}_2, \dots, \vec{M}_k$ 中第 ℓ 个元素都等于零. 故 \vec{M}_1 不是 $\vec{M}_2, \dots, \vec{M}_k$ 的线性组合. 由命题 1.12 (iv), $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_k$ 线性无关. 又因为其它行向量都是零向量, 所以 $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_k$ 是 $V_r(M)$ 的基底. 故 M 的行秩等于 k .

再证明 M 的列秩等于 k . 对 M 做有限次列变换得

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \bullet & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到 N 中只有 k 列非零, 且这 k 列从上到下第一个非零坐标出现的位置两两不同. 故这 k 列线性无关. 由此得出, 这 k 列是列空间 $V_c(N)$ 的一组基. 故 N 的列秩等于 k . 根据引理 3.3, M 的列秩也等于 k .

定理 3.7 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则 A 的行秩等于它的列秩.

证明. 由第一章第一讲命题 2.3 可知, A 可以通过初等行变换化为阶梯型矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中 \bullet 代表非零实数, $*$ 代表实数.

由例 3.6 可知 B 的行秩和列秩相等. 根据引理 3.2, A 的行秩等于 B 的行秩. 根据引理 3.5, A 的列秩等于 B 的列秩. 故 A 的行秩与列秩相等. \square

定义 3.8 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 行秩称为它的秩. 记为 $\text{rank}(A)$.

由上述定理可知, 矩阵的秩既是它的行秩也是它的列秩. 对矩阵的初等行变换和列变换统称矩阵的初等变换.

推论 3.8 设 B 是实矩阵 A 通过有限次初等变换得到的. 则 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

证明. 设 B 是实矩阵 A 通过一次初等行 (列) 变换得到的. 根据第二章引理 3.2 (第二章引理 3.5) 可知, A 和 B 的行 (列) 秩相同. 根据第二章定理 3.6, 它们的秩相同. \square

例 3.9 计算

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

计算 $\text{rank}(A)$.

解. 利用初等行变换

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & -9 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\text{rank}(A) = 2$.

另解. 利用初等列变换

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -9 & -7 \\ 4 & 1 & -9 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\text{rank}(A) = 2$.

例 3.10 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 证明: $\text{rank}(A) \leq \min(m, n)$.

证明. 因为 $V_r(A)$ 是 $\mathbb{R}^{1 \times m}$ 的子空间, 所以 $\dim(V_r(A)) \leq m$ (第二讲命题 1.25). 故 $\text{rank}(A) \leq m$. 因为 $V_c(A)$ 是 \mathbb{R}^n 的子空间, 所以 $\dim(V_c(A)) \leq n$ (第二讲命题 1.25). 故 $\text{rank}(A) \leq n$. \square

定义 3.11 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 如果 $\text{rank}(A) = m$, 则称 A 是行满秩的. 如果 $\text{rank}(A) = n$, 则称 A 是列满秩的. 当 $m = n$ 且 $\text{rank}(A) = n$ 时, 称 A 是满秩的.

例 3.12 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{m \times k}$. 令

$$(A, B) = (\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}, \vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(k)}) \in \mathbb{R}^{m \times (n+k)}.$$

证明: $\text{rank}((A, B)) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

证明. 设 $C = (A, B)$. 不妨设 $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}$ 的一个极大线性无关组是 $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(s)}$; $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(k)}$ 的一个极大线性

无关组是 $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(t)}$. 则矩阵 C 的列向量在

$$V = \langle \vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(s)}, \vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(t)} \rangle$$

中. 于是, $V_c(C) \subset V$ (第二章第一讲命题 1.25). 故 $\text{rank}(C) \leq \dim(V) \leq s + t$. \square

另证. 注意到 $V_c(C) = V_c(A) + V_c(B)$. 由子空间的维数公式可知:

$$\begin{aligned} \dim(V_c(C)) &= \dim(V_c(A) + V_c(B)) \\ &= \dim(V_c(A)) + \dim(V_c(B)) - \dim(V_c(A) \cap V_c(B)) \\ &\leq \dim(V_c(A)) + \dim(V_c(B)). \end{aligned}$$

故 $\text{rank}(C) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$. \square