第二章　矩阵

3.3　矩阵的转置

定义 3.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 矩阵 A 的 转置 是在 $\mathbb{R}^{n\times m}$ 中的矩阵. 它在第 j 行, 第 i 列处的元素等于 A 在第 i 行, 第 j 列处的元素, 其中 $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. 矩阵 A 的转置记为 A^t.

例 3.2 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

可直接验证 $(A^t)^t = A$.

例 3.3 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^t)$.
证明. 不妨设 $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r$ 是 A 的行向量中的一个极大线性无关组. 则 $\operatorname{rank}(A) = r$. 可直接验证 $\vec{A}_1^t, \ldots, \vec{A}_r^t$ 是 A^t 中列向量的一个极大线性无关组. 故 $\operatorname{rank}(A^t) = r$.

4　线性方程组和矩阵的秩

4.1　定性部分

定理 4.1 *设 L 是以矩阵 $B=(A|\mathbf{b})\in\mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组.*

(i) L 相容当且仅当 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$.

(ii) L 确定当且仅当 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=n$.

证明. (i) 设 L 相容. 则 $\mathbf{b}\in V_c(A)$ (见第二章第一讲例 1.4). 于是, $V_c(B)\subset V_c(A)$ (第二章第二讲命题 1.26 (ii)). 我们显然有 $V_c(A)\subset V_c(B)$. 故 $V_c(A)=V_c(B)$. 从而 $\dim(V_c(A))=\dim(V_c(B))$. 于是, $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$ (第二章第二讲定理 3.6).

反之, 设 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$. 则 $\dim(V_c(A))=\dim(V_c(B))$ (第二章第二讲定理 3.6). 因为 $V_c(A)\subset V_c(B)$, 所以 $V_c(A)=V_c(B)$ (第二章第二讲命题 2.13). 我们得到 $\mathbf{b}\in V_c(A)$, 即 L 相容(见第二章第一讲例 1.4).

(ii) 设 L 确定. 则 L 相容. 故 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$. 下面证明 $\mathrm{rank}(A)=n$, 即 $\vec{A}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(n)}$ 线性无关. 设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ 使得 $\alpha_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\alpha_n\vec{A}^{(n)}=\mathbf{0}_m$. 且 $(\beta_1,\ldots,\beta_n)^t$ 是 L 的解. 则 $(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_n+\beta_n)^t$ 也是 L 的解. 因为 L

确定, 所以 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. 由此可知 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}$ 线性无关.

反之, 设 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$. 由 (i) 可知 L 相容. 故 $\mathbf{b} \in V_c(A)$. 因为 $\dim(V_c(A)) = n$, 所以 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}$ 是 $V_c(A)$ 的一组基. 于是, 存在唯一的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{b} = \lambda_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \lambda_n \vec{A}^{(n)}$. 故 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t$ 是 L 唯一解. □

推论 4.2 *设 H 是以矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为系数矩阵的 n 元齐次线性方程组. 则 H 只有平凡解当且仅当 $\text{rank}(A) = n$.*

证明. 注意到 H 是以 $B = (A|\mathbf{0}_m)$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 显然 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$. 根据定理 4.1 (ii). H 只有平凡解当且仅当 $\text{rank}(A) = n$. □

在应用中, 由 n 个方程组成的 n 元线性方程组出现的较多. 为此, 我们给出下列两个推论.

推论 4.3 *设 L 是以矩阵 $B = (A|\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 则 L 确定当且仅当 $\text{rank}(A) = n$.*

证明. 设 L 确定. 根据定理 4.1 (ii), $\text{rank}(A) = n$. 反之, 设 $\text{rank}(A) = n$. 则

$$n = \text{rank}(A) \leq \text{rank}(B) \leq \min(n+1, n) = n.$$

故 $\text{rank}(B) = n$. 根据定理 4.1 (ii), L 确定. □

推论 4.4 设 L 是以矩阵 $B = (A|\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{n\times(n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组, H 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组. 则 L 确定当且仅当 H 确定.

证明. 由推论 4.3 可知, L 确定当且仅当 $\mathrm{rank}(A) = n$. 再由推论 4.2 可知, $\mathrm{rank}(A) = n$ 当且仅当 H 只有平凡解. □.

例 4.5 科斯特利金书第七页平板受热问题.

4.2 定量部分

定理 4.6 *(对偶定理, 方程组版)* 设 H 是以 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组. 则

$$\dim(\mathrm{sol}(H)) + \mathrm{rank}(A) = n.$$

证明. 设 $r = \mathrm{rank}(A)$. 不妨设 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(r)}$ 是 $V_c(A)$ 的一组基. 则对任意 $j \in \{r+1, \ldots, n\}$, 存在 $\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,r}$ 使得

$$\vec{A}^{(j)} = \alpha_{j,1}\vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_{j,r}\vec{A}^{(r)}.$$

令 $\mathbf{v}_j = (\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,r}, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)^t$, 其中 -1 出现在第 j 个位置. 则 $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 H 的解. 由 -1 在 $\mathbf{v}_j$ 中出现的位置可断定 $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 线性无关. 对任意 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^t \in \mathrm{sol}(H)$,

$$\mathbf{z} + z_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + z_n\mathbf{v}_n = (\beta_1, \ldots, \beta_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r})^t \in \mathrm{sol}(H), \tag{1}$$

其中 $\beta_1,\ldots,\beta_r\in\mathbb{R}$. 这是因为 $\mathrm{sol}(H)$ 是子空间(见第二章第一讲例 1.18 和命题 1.17). 由此可知,

$$\beta_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\beta_r\vec{A}^{(r)}=\mathbf{0}_m.$$

故 $\beta_1=\cdots=\beta_r=0$. 由 (1) 可知,

$$\mathbf{z}=(-z_{r+1})\mathbf{v}_{r+1}+\cdots+(-z_n)\mathbf{v}_n.$$

进而, $\mathbf{v}_{r+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 $\mathrm{sol}(H)$ 的基. 故 $\dim(\mathrm{sol}(H))=n-r$. □

例 4.7 计算下列齐次线性方程组 H

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3-x_4 &= 0\\ x_1+x_2-x_3+x_4 &= 0\\ x_1+x_2+x_3-x_4 &= 0\end{cases}$$

解空间的一组基.

解. 该方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}.$$

通过初等行变换得

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&2&0&2\\0&2&2&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&2&0&2\\0&0&2&-2\end{pmatrix}.$$

于是, $\mathrm{rank}(A) = 3$. 根据定理 *4.6*, $\dim(\mathrm{sol}(H))$=4−3=1. 由高斯消去可知, 给定的方程组等价于:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{等价于} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}.$$

令 $x_4 = 1$. 则 $x_3 = 1$, $x_2 = -1$, $x_1 = 1$. 该方程组有非零解 $\mathbf{v} = (1, -1, 1, 1)^t$. 故 $\mathrm{sol}(H)$ 的基是 $\mathbf{v}$. 写成集合的形式, 我们有 $\mathrm{sol}(H) = \{\lambda\mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

设 $M \in \mathbb{R}^n$ 是线性流形. 则 M 的方向的维数定义为 M 的维数, 也记为 $\dim(M)$.

推论 4.8 设 L 是以 $B = (A|\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 如果 L 相容, 则

$$\dim(\mathrm{sol}(L)) + \mathrm{rank}(A) = n.$$

证明. 设 H 是以 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为系数矩阵的 n 元齐次线性方程组. 设 $\mathbf{v} \in \mathrm{sol}(L)$. 根据第二章第一讲例 1.22, $\mathrm{sol}(L) = \mathbf{v} + \mathrm{sol}(H)$. 于是, $\dim(\mathrm{sol}(L)) = \dim(\mathrm{sol}(H))$. 再根据定理 4.6,

$$n = \dim(\mathrm{sol}(H)) + \mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{sol}(L)) + \mathrm{rank}(A). \quad \square$$

例 4.9 确定下列线性方程组 L

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 & = & 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 & = & 3 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + 3x_5 & = & 5 \end{array}\right.$$

的解流形.

解. 该方程组的增广矩阵

$$B = (A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

通过初等行变换得

$$B \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A) = 2$. 根据定理 *4.1*, L 相容. 根据定理 *4.6*, $\dim(\operatorname{sol}(L)) = 5 - 2 = 3$. 由高斯消去可知, 给定方程组等价于

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_2 + 2x_4 = 2 \end{array}\right. \quad \text{等价于} \quad \left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 1 + x_3 + x_4 - x_5 \\ x_2 = 1 - x_4. \end{array}\right.$$

令 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. 我们得到 $\mathbf{v} = (2, 1, 0, 0, 0)^t$ 是 L 的一个*(*特*)*解.

再由对系数矩阵的高斯消去法可知, 以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组 H 等价于

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{等价于} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = x_3 + x_4 - x_5 \\ x_2 = -x_4. \end{cases}$$

分别令 $x_3 = 1, x_4 = x_5 = 0$; $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$; $x_3 = x_4 = 0, x_5 = 1$. 我们得到 H 的三个线性无关的解:

$$\mathbf{w}_1 = (1,0,1,0,0)^t, \mathbf{w}_2 = (0,-1,0,1,0)^t, \mathbf{w}_3 = (-1,0,0,0,1)^t.$$

故 $\mathrm{sol}(L) = \mathbf{v} + \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$.

5 坐标空间之间的线性映射

5.1 定义和（与基底无关的）性质

定义 5.1 设 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是映射. 如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y})}_{\text{保持加法}} \quad \text{和} \quad \underbrace{\phi(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\phi(\mathbf{x})}_{\text{保持数乘}},$$

则称 ϕ 是线性映射.

例 5.2 设

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{0}_m \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x} \end{array}$$

是线性映射. 称 ϕ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的零映射, ψ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的恒同映射.

命题 5.3 设 $\phi:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. 则下列命题等价:

(i) ϕ 线性,

(ii) 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$\underbrace{\phi(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})=\alpha\phi(\mathbf{x})+\beta\phi(\mathbf{y})}_{\text{保持线性运算}}.$$

(iii) 对任意 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k\in\mathbb{R}^n$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$,

$$\underbrace{\phi(\alpha_1\mathbf{x}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{x}_k)=\alpha_1\phi(\mathbf{x}_1)+\cdots+\alpha_k\phi(\mathbf{x}_k)}_{\text{保持线性组合}}.$$

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) 设 ϕ 是线性的. 则

$$\phi(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})=\phi(\alpha\mathbf{x})+\phi(\beta\mathbf{y})=\alpha\phi(\mathbf{x})+\beta\phi(\mathbf{y}).$$

故 ϕ 保持线性运算. 反之, 取 $\alpha=\beta=1$ 得到 ϕ 保持加法, 取 $\beta=0$ 得到 ϕ 保持数乘.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) 对 k 归纳. 当 $k=1$ 时,

$$\phi(\alpha_1\mathbf{x}_1)=\phi(\alpha_1\mathbf{x}_1+0\mathbf{x}_1)=\alpha_1\phi(\mathbf{x}_1)+0\phi(\mathbf{x}_1)=\alpha_1\phi(\mathbf{x}_1).$$

当 $k=2$ 时, 结论是 (ii). 设 $k>2$ 且结论对 $k-1$ 成立. 则

$$\begin{aligned}
&\phi(\alpha_1\mathbf{x}_1+\cdots+\alpha_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}+\alpha_k\mathbf{x}_k)\\
=&\phi(\alpha_1\mathbf{x}_1+\cdots+\alpha_{k-1}\mathbf{x}_{k-1})+\alpha_k\phi(\mathbf{x}_k) && [k=2]\\
=&\alpha_1\phi(\mathbf{x}_1)+\cdots+\alpha_{k-1}\phi(\mathbf{x}_{k-1})+\alpha_k\phi(\mathbf{x}_k) && [\text{归纳假设}].
\end{aligned}$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i) 令 $k=2$ 和 $\alpha_1=\alpha_2=1$ 可知, ϕ 保持加法. 令 $k=1$ 可知, ϕ 保持数乘. □

例 5.4 设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 线性. 则 $\phi(\mathbf{0}_n)=\mathbf{0}_m$.

证明. 计算

$$\phi(\mathbf{0}_n)=\phi(\mathbf{0}_n+\mathbf{0}_n)=\phi(\mathbf{0}_n)+\phi(\mathbf{0}_n)\Longrightarrow\phi(\mathbf{0}_n)=\mathbf{0}_m. \quad \square$$

例 5.5 设 $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rccc}\psi_\lambda: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n\\ & \mathbf{x} & \mapsto & \lambda\mathbf{x}.\end{array}$$

是线性的. 称之为数乘映射. 当 λ=0 时, ψ_λ 是零映射. 当 λ=1 时, ψ_λ 是恒同映射.

例 5.6 设 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$.

$$\begin{array}{rccc}T_{\mathbf{v}}: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n\\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{v}+\mathbf{x}.\end{array}$$

不是线性的. 这是因为 $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{0})=\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$.

命题 5.7 设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是线性映射.

(i) 如果 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\in\mathbb{R}^n$ 线性相关, 则 $\phi(\mathbf{v}_1),\ldots,\phi(\mathbf{v}_k)$ 也线性相关.

(ii) 如果 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 则 $\phi(U)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间. 特别地, $\mathrm{im}(\phi)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间.

(iii) 如果 W 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间, 则 $\phi^{-1}(W)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 特别地, $\phi^{-1}(\{\mathbf{0}_m\})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

证明. (i) 设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$, 不全为零, 使得 $\sum_{i=1}^k\alpha_i\mathbf{v}_i=\mathbf{0}_n$. 根据上一章命题 5.3,

$$\mathbf{0}_m=\phi(\mathbf{0}_n)=\phi\left(\sum_{i=1}^k\alpha_i\mathbf{v}_i\right)=\sum_{i=1}^k\alpha_i\phi(\mathbf{v}_i).$$

(ii) 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\phi(U)$. 则存在 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in U$ 使得 $\phi(\mathbf{u})=\mathbf{x}$ 和 $\phi(\mathbf{v})=\mathbf{y}$. 对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}&=\alpha\phi(\mathbf{u})+\beta\phi(\mathbf{v})\\&=\phi(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})\\&\in\phi(U)\quad(\text{命题 1.17 (ii)}).\end{aligned}$$

根据第二章第一讲命题 1.16, $\phi(U)$ 是子空间.

(iii) 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\phi^{-1}(W),\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 我们计算

$$\phi(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})=\alpha\phi(\mathbf{x})+\beta\phi(\mathbf{y}).$$

因为 $\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y}) \in W$ 且 W 是子空间, 所以 $\alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y}) \in W$. 由此得出 $\phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \in W$. 从而, $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \phi^{-1}(W)$. □

例 5.8 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n+\ell}$ 且

$$\mathbf{w}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_j \\ \alpha_{n+1,j} \\ \vdots \\ \alpha_{n+\ell,j} \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_{n+1,j}, \ldots, \alpha_{n+\ell,j} \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$. 证明: 如果 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性无关, 则 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ 线性无关.

证明. 设

$$\begin{array}{cccc} \phi: & \mathbb{R}^{n+\ell} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+\ell} \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{array}$$

则 ϕ 是线性映射. 因为 $\phi(\mathbf{w}_j) = \mathbf{v}_j$, $j = 1, \ldots, k$ 且 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性无关, 所以命题 *5.7 (i)* 蕴含 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ 线性无关. □

定义 5.9 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 坐标空间 $\mathbb{R}^n$ 中

的子空间 $\phi^{-1}(\{\mathbf{0}_m\})$ 称为 ϕ 的核(kernel), 记为 $\ker(\phi)$. 坐标空间 $\mathbb{R}^m$ 中的子空间 $\operatorname{im}(\phi)$ 称为 ϕ 的像(image).

例 5.10 设 ϕ 和 ψ 由例 *5.2* 给出. 则对零映射 ϕ, 我们有:

$$\ker(\phi) = \mathbb{R}^n \quad \text{和} \quad \operatorname{im}(\phi) = \{\mathbf{0}_m\}.$$

对恒同映射 ψ, 我们有:

$$\ker(\psi) = \{\mathbf{0}\} \quad \text{和} \quad \operatorname{im}(\psi) = \mathbb{R}^n.$$

设 $\psi_\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 由例 *5.5* 给出. 则数乘映射 ψ_λ, 我们有: 当 $\lambda \neq 0$ 时,

$$\ker(\psi_\lambda) = \{\mathbf{0}\} \quad \text{和} \quad \operatorname{im}(\psi_\lambda) = \mathbb{R}^n.$$

当 $\lambda = 0$ 时, ψ_0 是零映射.

设 $\phi : \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是例 *5.8* 中的投射. 则

$$\ker(\phi) = \langle \mathbf{e}_{n+1}, \ldots, \mathbf{e}_{n+k} \rangle \quad \text{和} \quad \operatorname{im}(\phi) = \mathbb{R}^n.$$

命题 5.11 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 则 ϕ 是单射当且仅当 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$.

证明. 设 ϕ 是单射. 根据上一章命题 5.3, $\phi(\mathbf{0}_n) = \mathbf{0}_m$. 因为 ϕ 是单射, 所以 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$. 反之, 设 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{y})$. 则

$$\phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y}) = \mathbf{0}_m.$$

于是, $\mathbf{x}-\mathbf{y}\in\ker(\phi)$. 因为 $\ker(\phi)=\{\mathbf{0}_n\}$, 所以 $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{0}$. 故 $\mathbf{x}=\mathbf{y}$, 即 ϕ 是单射. □

例 5.12 设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是线性单射. 证明: 如果 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\in\mathbb{R}^n$ 线性无关, 则 $\phi(\mathbf{v}_1),\ldots,\phi(\mathbf{v}_k)$ 线性无关.

证明. 设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1\phi(\mathbf{v}_1)+\cdots+\alpha_k\phi(\mathbf{v}_k)=\mathbf{0}_m.$$

则 $\phi(\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k)=\mathbf{0}_m$. 因为 ϕ 是单射, 所以 $\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}_n$. 因为 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 线性无关, 所以 $\alpha_1=\cdots=\alpha_k=0$. 故 $\phi(\mathbf{v}_1),\ldots,\phi(\mathbf{v}_k)$ 线性无关. □

5.2 与基底和维数有关的性质

命题 5.13 设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是线性映射, U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 则 $\dim(U)\geq\dim(\phi(U))$;

证明. 设 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d$ 是 U 的一组基. 则

$$\phi(U)=\langle\phi(\mathbf{u}_1),\ldots,\phi(\mathbf{u}_d)\rangle.$$

根据第二章第二讲推论 2.9, $\dim(\phi(U))\leq d$. □

定理 5.14 *(线性映射基本定理)* 设 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的任意给定的向量. 则存在唯一的线性映射 ϕ 使得 $\phi(\mathbf{v}_j)=\mathbf{w}_j$, $j=1,2,\ldots,n$.

证明. 定义

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j & \mapsto & \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \end{array}.$$

因为 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是基底, 所以对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 存在唯一的 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j$. 于是, ϕ 是良定义的. 显然 $\phi(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

下面验证 ϕ 是线性的. 设

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j,\ \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j,\ \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}.$$

则

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \phi\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j\right) \\ &= \phi\left(\sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j) \mathbf{v}_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j) \mathbf{w}_j \quad (\phi \text{ 的定义}) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j + \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{w}_j \\ &= \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y}) \quad (\phi \text{ 的定义}). \end{aligned}$$

设 $\lambda \in \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda \mathbf{x}) &= \phi\left(\sum_{j=1}^{n}(\lambda\alpha_j)\mathbf{v}_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(\lambda\alpha_j)\mathbf{w}_j \quad (\phi \text{ 的定义}) \\
&= \lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbf{w}_j \\
&= \lambda\phi(\mathbf{x}) \quad (\phi \text{ 的定义}).
\end{aligned}$$

最后, 我们来验证唯一性. 设 $\psi : \mathbb{R}^n :\longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射满足 $\psi(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 则

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\psi(\mathbf{v}_j) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbf{w}_j = \phi(\mathbf{x}).$$

故 $\psi = \phi$. $\square$

例 5.15 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的标准基, 且 $\theta \in [0, 2\pi)$. 设 $R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 的线性映射满足

$$R_\theta(\mathbf{e}_1) = \cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_2, \;\; R_\theta(\mathbf{e}_2) = -\sin(\theta)\mathbf{e}_1 + \cos(\theta)\mathbf{e}_2.$$

设 $\mathbf{x} = (\rho\cos(\alpha), \rho\sin(\alpha))^t$. 可直接计算可得

$$R_\theta(\mathbf{x}) = (\rho\cos(\alpha+\theta), \rho(\sin(\alpha+\theta)).$$

我们称 R_θ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的旋转 *(rotation)*.

例 5.16 设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基. 设 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是满足 $f(\mathbf{e}_j) = \lambda_j, j = 1, 2, \ldots, n$ 的线性映射. 则对任意 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

称 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性函数.

例 5.17 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\phi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是满足 $\phi_A(\mathbf{e}_j) = \vec{A}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 则对任意 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_A(\mathbf{x}) = x_1\vec{A}^{(1)} + \cdots + x_n\vec{A}^{(n)}.$$

称 ϕ_A 是由 A 诱导的线性映射.

设 H 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程程组, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 且 L 是以 $B = (A|\mathbf{b})$ 为增广矩阵的线性方程组. 则

$$\ker(\phi_A) = \mathrm{sol}(H),\ \mathrm{im}(\phi_A) = V_c(A) \text{ 且 } L \text{ 相容 } \iff \mathbf{b} \in \mathrm{im}(\phi).$$

引理 5.18 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ 是 $\ker(\phi)$ 的一组基.

(i) 如果 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d, \mathbf{v}_{d+1}, \ldots, \mathbf{v}_{d+k}$ 线性无关, 则 $\phi(\mathbf{v}_{d+1}), \ldots, \phi(\mathbf{v}_{d+k})$ 线性无关;

(ii) 如果 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d, \mathbf{v}_{d+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 则 $\phi(\mathbf{v}_{d+1}), \ldots, \phi(\mathbf{v}_n)$ 是 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基.

证明. (i) 设 $\alpha_{d+1},\ldots,\alpha_{d+k}\in\mathbb{R}$ 使得 $\alpha_{d+1}\phi(\mathbf{v}_{d+1})+\cdots+\alpha_{d+k}\phi(\mathbf{v}_{d+k})=\mathbf{0}_m$. 则 $\phi(\alpha_{d+1}\mathbf{v}_{d+1}+\cdots+\alpha_{d+k}\mathbf{v}_{d+k})=\mathbf{0}_m$. 由此可知,

$$\alpha_{d+1}\mathbf{v}_{d+1}+\cdots+\alpha_{d+k}\mathbf{v}_{d+k}\in\ker(\phi).$$

故存在 $\alpha_1,\ldots,\alpha_d\in\mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_{d+1}\mathbf{v}_{d+1}+\cdots+\alpha_{d+k}\mathbf{v}_{d+k}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_d\mathbf{v}_d.$$

因为 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_d$, $\mathbf{v}_{d+1},\ldots,\mathbf{v}_{d+k}$ 是线性无关, 所以 $\alpha_{d+1}=\cdots=\alpha_{d+k}=0$. 故 $\phi(\mathbf{v}_{d+1}),\ldots,\phi(\mathbf{v}_{d+k})$ 线性无关.

(ii) 由 (i) 可知, $\phi(\mathbf{v}_{d+1}),\ldots,\phi(\mathbf{v}_n)$ 线性无关. 他们显然在 $\mathrm{im}(\phi)$ 中. 我们只要证明 $\mathrm{im}(\phi)$ 中的任意向量都是它们的线性组合即可. 设 $\mathbf{y}\in\mathrm{im}(\phi)$. 则存在 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbf{y}=\phi(\mathbf{x})$. 因为 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 所以存在 $\beta_1,\ldots,\beta_n\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{x}=\beta_1\mathbf{v}_1+\cdots+\beta_d\mathbf{v}_d+\beta_{d+1}\mathbf{v}_{d+1}+\cdots+\beta_n\mathbf{v}_n.$$

故

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x}) &= \phi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i\right) \quad (\text{定义}) \\
&= \phi\left(\sum_{i=1}^{d} \beta_i \mathbf{v}_i\right) + \phi\left(\sum_{j=d+1}^{n} \beta_j \mathbf{v}_j\right) \quad (\phi\ \text{线性}) \\
&= \phi\left(\sum_{j=d+1}^{n} \beta_j \mathbf{v}_j\right) \quad \left(\sum_{i=1}^{d} \beta_i \mathbf{v}_i \in \ker(\phi)\right) \\
&= \sum_{j=d+1}^{n} \beta_j \phi(\mathbf{v}_j) \quad (\phi\ \text{线性}). \quad \square
\end{aligned}
$$

定理 5.19 *(对偶定理, 线性映射版)* 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 则

$$\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = n.$$

证明. 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ 是 $\ker(\phi)$ 的一组基. 由基扩充定理 (第二章第二讲定理 2.11), $\mathbb{R}^n$ 有一组基 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d, \mathbf{v}_{d+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$. 由引理 5.18 (ii), $\phi(\mathbf{v}_{d+1}), \ldots, \phi(\mathbf{v}_n)$ 是 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基. 于是, $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = n - d$. □

推论 5.20 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是线性映射. 则 ϕ 是单射当且仅当它是满射.

证明. 如果 ϕ 是单射, 则 $\dim(\ker(\phi)) = 0$. 由上述定理可知 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = n$. 又因为 $\mathrm{im}(\phi) \subset \mathbb{R}^n$, 所以 $\mathrm{im}(\phi) = \mathbb{R}^n$ (第

二章第二讲命题 2.13). 即 ϕ 是满射. 反之, 如果 ϕ 是满射, 则 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = n$. 由上述定理可知, $\dim(\ker(\phi)) = 0$. 在根据命题 5.11, ϕ 是单射. □

例 5.21 *利用定理 5.19 证明对偶定定理的方程版.*

证明. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, H 是以 A 为系数矩阵的 n 元齐次线性方程组, ϕ_A 是由 A 诱导的从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射. 由例 5.17 可知, $\mathrm{im}(\phi_A) = V_c(A)$ 和 $\ker(\phi_A) = \mathrm{sol}(H)$. 故定理 5.19 蕴含对偶定理的方程版.