

第二章 矩阵

定理 6.24 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$, $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$. 则

$$(i) \operatorname{rank}(AB) \leq \min(\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B));$$

$$(ii) \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - s \leq \operatorname{rank}(AB) \quad (\text{Sylvester 不等式}).$$

证明. 考虑线性映射 $\phi_A : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$ 和 $\phi_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$. 我们有下列交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\phi_B} & \mathbb{R}^s \\ & \searrow \phi_{AB} = \phi_A \circ \phi_B & \downarrow \phi_A \\ & & \mathbb{R}^m. \end{array}$$

(i) 直接计算得:

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(AB) &= \dim(\operatorname{im}(\phi_{AB})) \quad (\text{命题 6.6 (i)}) \\ &= \dim(\phi_A(\operatorname{im}(\phi_B))) \quad (\operatorname{im}(\phi_{AB}) = \phi_A(\operatorname{im}(\phi_B))) \\ &\leq \dim(\operatorname{im}(\phi_B)) \quad (\text{命题 5.13 (i)}) \\ &= \operatorname{rank}(B) \quad (\text{命题 6.6 (i)}). \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(AB) &= \dim(\phi_A(\operatorname{im}(\phi_B))) \quad (\text{见上面的计算}) \\ &\leq \dim(\phi_A(\mathbb{R}^s)) \quad (\operatorname{im}(\phi_B) \subset \mathbb{R}^s) \\ &= \dim(\operatorname{im}(\phi_A)) \quad (\phi_A(\mathbb{R}^s) = \operatorname{im}(\phi_A)) \\ &= \operatorname{rank}(A) \quad (\text{命题 6.6 (i)}). \end{aligned}$$

(i) 成立.

(ii) 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ 是 $\ker(\phi_A) \cap \text{im}(\phi_B)$ 的一组基, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ 是 $\text{im}(\phi_B)$ 的一组基. 则 $\text{rank}(B) = d + k$.

断言. $\text{rank}(AB) \geq k$.

断言的证明. 设 $\alpha_1\phi_A(\mathbf{u}_1) + \dots + \alpha_k\phi_A(\mathbf{u}_k) = \mathbf{0}_m$, 其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. 则 $\phi_A(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_m$, 其中 $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{u}_k$. 故 $\mathbf{u} \in \text{im}(\phi_B) \cap \ker(\phi_A)$. 于是, $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d \rangle$. 因为 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ 线性无关, 所以 $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. 于是, $\phi_A(\mathbf{u}_1), \dots, \phi_A(\mathbf{u}_k)$ 是 $\text{im}(\phi_{AB})$ 中的一组线性无关向量. 故 $\dim(\text{im}(\phi_{AB})) \geq k$. 从而, $\text{rank}(AB) \geq k$. 断言成立.

由对偶定理(线性映射版)可知,

$$\text{rank}(A) = s - \dim(\ker(\phi_A)) \leq s - d.$$

于是

$$\text{rank}(B) + \text{rank}(A) - s \leq d + k + s - d - s = k.$$

根据上述断言, (ii) 成立. \square

注解 6.25 上述证明中的断言可以加强为 $\text{rank}(AB) = k$.

推论 6.26 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, B 是 m 阶满秩方阵, C 是 n 阶满秩方阵. 则 $\text{rank}(A) = \text{rank}(BA) = \text{rank}(AC)$.

证明. 由上述定理的两个不等式可知

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - m \leq \text{rank}(BA) \leq \min(\text{rank}(B), \text{rank}(A)).$$

因为 $\text{rank}(B) = m$, 所以 $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(BA) \leq \text{rank}(A)$.
故 $\text{rank}(BA) = \text{rank}(A)$. 另一个等式可以类似地证明. \square

7 方阵

实数上所有方阵的集合记为 $M_n(\mathbb{R})$.

7.1 $M_n(\mathbb{R})$ 上的运算

对于任意 $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 我们有

$$(A1) \quad A + B = B + A;$$

$$(A2) \quad (A + B) + C = A + (B + C);$$

$$(A3) \quad A + O = A, \text{ 其中 } O \text{ 是 } n \text{ 阶零矩阵};$$

$$(A4) \quad A + (-A) = O.$$

$$(M1) \quad (AB)C = A(BC);$$

$$(M2) \quad AE = EA = A, \text{ 其中 } E \text{ 是 } n \text{ 阶单位矩阵}.$$

$$(S1) \quad (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A);$$

$$(S2) \quad 1A = A.$$

$$(AM) \quad A(B + C) = AB + AC; (A + B)C = AC + BC.$$

$$(AS) \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A; \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

$$(MS) \quad (\lambda A)(\mu B) = \lambda(A(\mu B)) = (\lambda\mu)(AB).$$

我们把 $M_n(\mathbb{R})$ 称为 \mathbb{R} 上的 n 阶矩阵代数.

记号. 设 $k \in \mathbb{Z}^+$, $A \in M_n(\mathbb{R})$. 根据乘法结合律, 我们定义:

$$A^k := \underbrace{A \cdots A}_k.$$

此外 $A^0 := E$. 可直接验证 $A^k A^\ell = A^{k+\ell}$ 和 $A^{k\ell} = (A^k)^\ell$.

例 7.1 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. 展开 $(A+B)^2$ 和 $(A+B)(A-B)$.

解. $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$.

$$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2.$$

只有当 $AB = BA$ 时, 我们才有

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad \text{和} \quad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$

定义 7.2 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 如果 $A^t = A$, 则称 A 是对称矩阵. 如果 $A^t = -A$, 则称 A 是斜对称矩阵. 如果存在 $k \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $A^k = O$. 则称 A 是幂零矩阵. 如果 $A^2 = A$, 则称 A 是幂等矩阵.

注解 7.3 设 $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. 则 A 对称当且仅当 $a_{i,j} = a_{j,i}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. 而 A 斜对称当且仅当

$a_{i,i} = 0$ 且 $a_{i,j} = -a_{j,i}$, 其中 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 且 $i \neq j$. 我们来验证关于斜对称的必要充分条件如下

$$A = -A^t \iff A + A^t = O$$

$$\iff a_{i,j} + a_{j,i} = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\iff 2a_{i,i} = 0, a_{i,j} + a_{j,i} = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$$

$$\iff a_{i,i} = 0, a_{i,j} + a_{j,i} = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j \quad (2 \neq 0).$$

例 7.4 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

可直接验证 A 是幂零的和 B 是幂等的.

例 7.5 设 $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. 则 $A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.

例 7.6 设

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

对任意 $n \in \mathbb{N}$, 计算 A^n .

解. 显然有 $A^0 = E_2$ 和 $A^1 = A$. 我们计算

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & c(a+b) \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}.$$

和

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & c(a+b) \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & c(a^2 + ab + b^2) \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}.$$

下面我们证明：当 $n > 0$ 时，

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & cd_n \\ 0 & b^n \end{pmatrix},$$

其中 $d_n = \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}$.

当 $n = 1, 2, 3$ 时结论成立. 设 $n > 3$ 且 $n - 1$ 时结论成立. 则

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{pmatrix} a^{n-1} & cd_{n-1} \\ 0 & b^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & ca^{n-1} + cbd_{n-1} \\ 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

而

$$ca^{n-1} + cbd_{n-1} = c(a^{n-1} + b \sum_{i=0}^{n-2} a^i b^{n-2-i}) = c \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i} = cd_n.$$

结论成立.

我们可以更简洁地把结果写成：

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & c \frac{a^n - b^n}{a - b} \\ 0 & b^n \end{pmatrix}, a \neq b, \quad \text{和} \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & nca^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}, a = b.$$

事实上，这也包括了 $n = 1$ 的情形.

7.2 交换不变量与中心元

由第二章第四讲例 6.19 可知, 对 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\text{rank}(AB)$ 可能不等于 $\text{rank}(BA)$. 换言之, 秩关于矩阵乘法不是交换不变量.

定义 7.7 设 $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. 我们称 $\sum_{i=1}^n a_{i,i}$ 是 A 的迹 (*trace*). 记为 $\text{tr}(A)$.

可直接验证: 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr}(A) + \beta \text{tr}(B).$$

命题 7.8 设 $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. 则

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

证明. 设 $C = (c_{ij}) = AB$ 和 $D = (d_{i,j}) = BA$. 则

$$c_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} \quad \text{和} \quad d_{i,i} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i}.$$

于是,

$$\text{tr}(C) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} \quad \text{和} \quad \text{tr}(D) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i}.$$

故 $\text{tr}(C) = \text{tr}(D)$. \square

例 7.9 证明: 对任意 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $AB - BA \neq E$.

证明. 我们计算 $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$ (命题 7.8). 但 $\text{tr}(E) = n > 0$. 故 $AB - BA \neq E$. \square

定义 7.10 设 $C \in M_n(\mathbb{R})$. 如果对任意 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 我们有 $AC = CA$. 则称 C 是中心元.

定理 7.11 设 $C \in M_n(\mathbb{R})$. 则 C 是中心元当且仅当 C 是数乘矩阵.

为了证明每个中心元是数乘矩阵, 我们需要下述引理.

引理 7.12 (搬运工引理) 对任意 $i, j \in \{1, \dots, k\}$, 设 $E_{i,j}^{(k)}$ 是在 i 行 j 列处的元素等于 1, 而其它元素都等于零的 k 阶方阵. 则对于 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$E_{i,j}^{(m)} A = \begin{pmatrix} O_{(i-1) \times n} \\ \vec{A}_j \\ O_{(m-i) \times n} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad AE_{i,j}^{(n)} = (O_{m \times (j-1)}, \vec{A}^{(i)}, O_{m \times (n-j)}).$$

证明. 根据列向量乘法公式, $AE_{i,j}^{(n)}$ 中除第 j 列外都是 $\mathbf{0}_m$. 而第 j 列是 $A\mathbf{e}_j = \vec{A}^{(i)}$. 故第二个等式成立. 由此可知

$$(E_{i,j}^{(m)} A)^t = A^t E_{j,i}^{(m)} = (O_{n \times (i-1)}, \vec{A}_j^t, O_{n \times (m-i)}).$$

对上式再次转置得到

$$(E_{i,j}^{(m)} A) = (O_{n \times (i-1)}, \vec{A}_j^t, O_{n \times (m-i)})^t = \begin{pmatrix} O_{(i-1) \times n} \\ \vec{A}_j \\ O_{(m-i) \times n} \end{pmatrix}.$$

第一个等式成立. \square

定理 7.11 的证明. 设 $C = \lambda E$. 则对任意 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $CA = \lambda A$ 且 $AC = \lambda A$. 故 $CA = AC$.

反之, 设 $C = (c_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ 是中心元. 对任意 $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $E_{i,j}^{(n)} C = C E_{i,j}^{(n)}$. 于是

$$\begin{pmatrix} O_{(i-1) \times n} \\ \vec{C}_j \\ O_{(n-i) \times n} \end{pmatrix} = (O_{n \times (j-1)}, \vec{C}^{(i)}, O_{n \times (n-j)}).$$

比较等式两侧矩阵的第 i 行可知, 当 $k \neq j$ 时, $c_{j,k} = 0$; 当 $k = j$ 时, $c_{j,j} = c_{i,i}$. 于是, C 是数乘矩阵. \square

7.3 可逆元

定义 7.13 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 如果存在 $B \in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $AB = BA = E$, 则称 A 是可逆矩阵. 此时, B 称为 A 的一个逆矩阵.

设 $BA = AB = E$ 且 $CA = AC = E$. 则

$$CAB = C \implies (CA)B = C \implies EB = C \implies B = C.$$

故上述定义中 B 是唯一的. 我们把 B 称为可逆矩阵的逆矩阵, 记为 A^{-1} .

定理 7.14 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 则 A 可逆当且仅当 A 满秩.

证明. 设 A 可逆, 则 $AA^{-1} = E$. 根据定理 6.24 (i), $\text{rank}(A) \geq \text{rank}(AA^{-1}) = \text{rank}(E) = n$. 故 $\text{rank}(A) = n$.

反之, 设 A 满秩. 则对任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解(第二章第三讲推论 4.3). 设 \mathbf{v}_j 是方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ 的解, $j = 1, 2, \dots, n$. 令 $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. 则

$$AB = (A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = E.$$

由第二章第三讲例 3.15, $\text{rank}(A^t) = n$. 由上述证明可知存在 $C \in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $A^t C = E$. 故 $C^t A = E$ (见第二章第四讲命题 6.23). 由此得出, $C^t AB = B$. 从而,

$$C^t(AB) = C^t E = C^t = B.$$

我们得到 $BA = E$. 于是, A 可逆. \square

注解 7.15 上述定理也可以用线性映射证明如下: 如果 A 可逆, 则存在 $B \in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $BA = AB = E$. 注意到 ϕ_A, ϕ_B 都是从 \mathbb{R}^n 到自身的映射. 于是, $\phi_A \circ \phi_B = \phi_E$ 和 $\phi_B \circ \phi_A = \phi_E$. 因为 ϕ_E 是恒同映射, 所以 ϕ_A 是双射. 故 A 满秩. (第二章第四讲命题 6.10 (iii)).

反之, 同样的命题蕴含 ϕ_A 是双射. 由第九周作业题 4 可知, ϕ_A^{-1} 是线性映射. 故存在 $B \in M_n(\mathbb{R})$, 使得 $\phi_A^{-1} = \phi_B$. 我们得出 $\phi_A \circ \phi_B = \phi_E$ 和 $\phi_B \circ \phi_A = \phi_E$. 于是, $AB = BA = E$.

推论 7.16 矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 可逆当且仅当存在 $B \in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $AB = E$ 或 $BA = E$.

证明. 这是因为 $AB = E$ 或 $BA = E$ 都可推出 A 满秩. \square

注解 7.17 上述推论也可以根据第二章第三讲推论 5.15 推出. 这是因为 $\phi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是单射当且仅当它是满射当且仅当它是双射.

命题 7.18 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 都可逆. 则

(i) AB 可逆且它的逆是 $B^{-1}A^{-1}$;

(ii) A^{-1} 可逆且它的逆是 $(A^{-1})^{-1} = A$;

(iii) A^t 可逆且其逆是 $(A^{-1})^t$.

证明. (i) $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = E$. 类似可验证 $(B^{-1}A^{-1})AB = E$.

(ii) 这是因为 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

(iii) 由第二章第四讲命题 6.23 可知,

$$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = E^t = E.$$

类似地, $(A^{-1})^t A^t = E$. \square

注解 7.19 上述命题中第一个结论实际上是逆映射的穿衣脱衣规则(第一章第二讲命题 4.14 (ii)), 而第二个结论对应着第一章第二讲命题 4.14 (i).

例 7.20 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 则线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 确定当且仅当 A 可逆. 此时它的唯一解是 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

例 7.21 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 幂零. 证明 $E - A$ 可逆.

证明. 设 $A^k = O$, 其中 $k > 0$. 则

$$E = E - A^k = (E - A)(E + A + \cdots + A^{k-1}).$$

故 $(E - A)^{-1} = E + A + \cdots + A^{k-1}$. \square

例 7.22 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 幂等且可逆. 证明: $A = E$.

证明. 因为 $A^2 = A$, 所以 $A(A - E) = O$. 由定理 6.24 (ii),

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(A - E) - n \leq 0.$$

根据定理 7.14, $\text{rank}(A) = n$. 于是, $\text{rank}(A - E) = 0$. 故 $A = E$. \square

7.4 杂例

设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

证明: 对 $m \in \mathbb{Z}^+$,

$$A^m = \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_m \\ f_m & f_{m+1} \end{pmatrix},$$

其中 $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_{m+1} = f_m + f_{m-1}$.

证明. $m = 1$ 时, 结论显然. 设 $m > 1$ 且 $m - 1$ 时结论成立. 则

$$\begin{aligned} A^m &= A^{m-1}A = \begin{pmatrix} f_{m-2} & f_{m-1} \\ f_{m-1} & f_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_{m-1} + f_{m-2} \\ f_m & f_m + f_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_m \\ f_m & f_{m+1} \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

设

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

和

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

不难计算

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\frac{1}{5} \\ \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{5} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad A = B^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} B.$$

验证:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\frac{1}{5} \\ \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1 - \lambda_2) & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1 - \lambda_2) \end{pmatrix} = E_2$$

和

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\frac{1}{5} \\ \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{1}{5}\lambda_2 \\ \sqrt{5}\lambda_1^2 & -\frac{\lambda_2^2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \frac{\sqrt{5}}{5}\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

注意到: 对任意 $C \in M_n(\mathbb{R})$,

$$(B^{-1}CB)^m = B^{-1}C^mB.$$

故

$$A^m = B^{-1}\text{diag}(\lambda_1^m, \lambda_2^m)B.$$

于是,

$$f_m = \left(\sqrt{5}\lambda_1^m, -\frac{1}{5}\lambda_2^m \right) \vec{B}^{(2)} = \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1^m - \lambda_2^m).$$

于是, Fibonacci 序列的闭形式是

$$f_m = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^m - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^m \right).$$

注意到

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, \dots, f_{10} = 55,$$

但

$$f_{50} = 12586269025.$$

渐近公式是

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f_m}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m} = \frac{\sqrt{5}}{5} \implies f_m \sim \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m.$$

小结. Fibonacci 序列:

$$\underbrace{f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_{m+1} = f_m + f_{m-1},}_{\text{递归公式}}$$

$$\underbrace{f_m = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m \right),}_{\text{闭形式}}$$

和

$$\underbrace{f_m \sim \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m}_{\text{渐进公式}}.$$

8 矩阵的初等等价

定义 8.1 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 如果存在 m 阶可逆方阵 P 和 n 阶可逆方阵 Q 使得 $A = PBQ$. 则称 A 与 B 初等等价. 记为 $A \sim_e B$.

我们来验证 \sim_e 是等价关系. 对任意 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 我们有 $A = E_m A E_n$. 于是, $A \sim_e A$. 自反性成立.

再设 $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 满足 $A \sim_e B$. 则存在 m 阶可逆方阵 P 和 n 阶可逆方阵 Q 使得 $A = PBQ$. 则 $B = P^{-1}AQ^{-1}$. 故 $B \sim_e A$. 对称性成立.

设 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 且 $A \sim_e B$ 和 $B \sim_e C$. 则存在 m 阶可逆方阵 P 和 n 阶可逆方阵 Q 使得 $A = PBQ$ 和 $B = SCT$. 故 $A = (PS)C(TQ)$. 因为可逆方阵的积仍可逆, 所以 $A \sim_e C$. 传递性成立.

我们将证明

定理 8.2 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则 $A \sim_e B \iff \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

为此, 我们需要用矩阵乘法来解释初等变换.

定义 8.3 设 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(i) $F_{i,j}^{(n)}$ 是把 E_n 中第 i 行和第 j 行互换的得到的矩阵. 称之为第一类初等矩阵.

(ii) 设 $\alpha \in \mathbb{R}$ 且 $i \neq j$. 则 $F_{i,j}^{(n)}(\alpha)$ 是把 E_n 中第 j 行通乘 α 加到第 i 行得到的矩阵. 称之为第二类初等矩阵.

(iii) 设 $\lambda \in \mathbb{R}$ 且 $\lambda \neq 0$. 则 $F_i^{(n)}(\lambda)$ 是把 E_n 中第 i 行通乘 λ 得到的矩阵. 称之为第三类初等矩阵.

这三类矩阵统称为 n 阶初等矩阵.

注解 8.4 可直接验证 $(F_{i,j}^{(n)})^2 = E_n$, $F_{i,j}^{(n)}(\alpha)F_{i,j}^{(n)}(-\alpha) = E_n$, 和 $F_i^{(n)}(\lambda)F_i^{(n)}(\lambda^{-1}) = E_n$. 故初等矩阵都是可逆的, 且它们的逆也是初等矩阵.

我们可以通过搬运工引理(上一讲引理 7.12)中定义矩阵 $E_{i,j}^{(k)}$ 表示初等矩阵如下:

$$F_{i,j}^{(n)} = E_n - E_{i,i}^{(n)} - E_{j,j}^{(n)} + E_{i,j}^{(n)} + E_{j,i}^{(n)}, \quad (1)$$

$$F_{i,j}^{(n)}(\alpha) = E_n + \alpha E_{i,j}^{(n)}, \quad (2)$$

$$F_i^{(n)}(\lambda) = E_n + (\lambda - 1)E_{i,i}^{(n)}. \quad (3)$$

设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 根据 (1),

$$F_{i,j}^{(m)} A = A - E_{i,i}^{(m)} A - E_{j,j}^{(m)} A + E_{i,j}^{(m)} A + E_{j,i}^{(m)} A.$$

根据搬运工引理, $F_{i,j}^{(m)} A$ 是把 A 中 i, j 两行对换得到的矩阵. 根据 (2),

$$F_{i,j}^{(m)}(\alpha) A = A + \alpha E_{i,j}^{(m)} A.$$

同理, $F_{i,j}^{(m)}(\alpha) A$ 是把 A 中第 j 行乘以 α 后加到第 i 行得到的矩阵. 根据 (3),

$$F_i^{(m)}(\lambda) A = A + (\lambda - 1)E_{i,i}^{(m)} A.$$

从而得到把 A 中第 i 行通乘 λ 的矩阵.

类似地, $AF_{i,j}^{(n)}$, $AF_{i,j}^{(n)}(\alpha)$ 和 $AF_i^{(n)}(\lambda)$ 分别是把 A 中 i, j 两行对换, 把 A 中第 i 列乘以 α 后加到第 j 列, 和把 A 中第 i 列通乘 λ 后得到的矩阵.

引理 8.5 (打洞引理) 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则存在可逆矩阵 $P \in M_m(\mathbb{R})$ 和 $Q \in M_n(\mathbb{R})$, 其中 P 和 Q 都是初等矩阵的乘积, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix},$$

且 $\text{rank}(A) = r$.

证明. 根据第一章第一讲命题 2.3 和第三类初等行变换, 存在若干个 m 阶初等矩阵, 使得它们的积 P 满足

$$PA = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中共有 r 行非零. 则存在若干个 n 阶第一类初等矩阵,

使得它们的积 Q_1 满足

$$PAQ_1 = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

进而存在若干个 n 阶第一类初等矩阵, 使得它们的积 Q_2 满足

$$PAQ_1Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

再令 $Q = Q_1Q_2$ 即可, 这是因为初等矩阵之积必然可逆. 根据第二章第五讲推论 6.27, $\text{rank}(A) = r$. \square

第二章第五讲定理 8.2 的证明. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 如果 $A \sim_e B$, 则存在可逆矩阵 $P \in M_m(\mathbb{R})$ 和 $Q \in M_n(\mathbb{R})$ 使

得 $A = PBQ$. 则第二章第五讲推论 6.27 蕴含 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

反之, 设 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$. 记为 r . 根据引理 8.5,

$$A \sim_e \begin{pmatrix} E_r & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}, B \sim_e \begin{pmatrix} E_r & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}.$$

根据传递性, 我们有 $A \sim_e B$. \square

注解 8.6 由上述证明过程可知, PA 是阶梯型.