

第二章 矩阵

例 8.7 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 且 $r = \text{rank}(A) > 0$. 证明: A 可以写成 r 个秩为 1 的矩阵之和.

证明. 根据打洞引理, 存在两个可逆矩阵 $P \in M_m(\mathbb{R})$, $Q \in M_n(\mathbb{R})$ 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

令 $B_i = (\mathbf{0}_m, \dots, \mathbf{0}_m, \mathbf{e}_i, \mathbf{0}_m, \dots, \mathbf{0}_m)$, 其中 $B_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, \mathbf{e}_i 是 \mathbb{R}^m 的标准基中第 i 个向量并出现在 $B^{(i)}$ 的第 i 行, $i = 1, \dots, r$. 则 $\text{rank}(B_i) = 1$ 且

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = B_1 + \dots + B_r.$$

由此可知

$$\begin{aligned} A &= P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1} \\ &= P^{-1}(B_1 + \dots + B_r)Q^{-1} \\ &= P^{-1}B_1Q^{-1} + \dots + P^{-1}B_rQ^{-1}. \end{aligned}$$

因为 P^{-1} 和 Q^{-1} 都满秩, 所以

$$\text{rank}(P^{-1}B_iQ^{-1}) = \text{rank}(B_i) = 1, \quad i = 1, \dots, r. \quad \square.$$

推论 8.8 商集 $\mathbb{R}^{m \times n} / \sim_e$ 共有 $\min(m, n) + 1$ 个元素. 它们的等价类是

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix},$$

$$r = 0, 1, \dots, \min(m, n).$$

证明. 根据第七周讲义例 3.10, 任何 $m \times n$ 的矩阵的秩都不大于 $\min(m, n)$. 于是, 定理 8.2 蕴含推论. \square

推论 8.9 可逆矩阵是初等矩阵之积.

证明. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 可逆. 则 $\text{rank}(A) = n$ (定理 7.14). 根据定理 8.2, 存在可逆矩阵 $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$, 其中 P 和 Q 都是初等矩阵的乘积, 使得 $PAQ = E$. 故 $A = P^{-1}Q^{-1}$. 因为初等矩阵的逆仍是初等矩阵, 所以 $P^{-1}Q^{-1}$ 也是初等矩阵之积(命题 7.18 (i)). \square

9 矩阵求逆

引理 9.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$, $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$. 设

$$B = (B_1, \dots, B_k),$$

其中 $B_\ell \in \mathbb{R}^{s \times n_\ell}$, $\ell = 1, \dots, k$. 则

$$AB = (AB_1, \dots, AB_k).$$

证明. 由列向量乘积公式(第二章第四讲注解 6.17 (ii))

$$AB = (A\vec{B}^{(1)}, \dots, A\vec{B}^{(n)}).$$

故

$$AB = \left(\underbrace{A(\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(n_1)})}_{B_1}, \dots, \underbrace{A(\vec{B}^{(n_1+\dots+n_{k-1}+1)}, \dots, \vec{B}^{(n)})}_{B_k} \right). \quad \square$$

命题 9.2 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 可逆, $B = (A, E_n) \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$, $P \in M_n(\mathbb{R})$. 如果 $PB = (E_n | Q)$, 则 $P = Q = A^{-1}$.

证明. 由上述引理可知, $PB = P(A, E_n) = (PA, P)$. 于是, $PA = E_n$ 和 $P = Q$. 根据第二章第五讲命题 7.18, $P = A^{-1}$. \square

设 A 可逆. 则 A^{-1} 是若干初等矩阵 C_1, \dots, C_k 之积(推论 8.9). 由上述命题可知:

$$(C_1 \cdots C_k)(A | E_n) = (E_n | A^{-1}).$$

于是, 对 $(A | E_n)$ 做初等行变换必然可以把它的前 n 列组成的子矩阵化为单位矩阵, 后 n 列组成的子矩阵就是 A^{-1} .

例 9.3 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

计算 A^{-1} .

解. 我们计算

$$\begin{aligned}
 (A|E) &\xrightarrow{F_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{F_{3,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{F_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{F_{3,2}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{F_{1,2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{F_{1,3}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

于是,

$$A^{-1} = F_{1,3}(1)F_{1,2}(-1)F_{3,2}(1)F_2(\frac{1}{2})F_{3,1}(-2)F_{1,2}.$$

另一种常见的矩阵求逆的方法如下: 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 设 k 是最小的正整数使得 A^0, A^1, \dots, A^k 在 \mathbb{R} 上“线性相关”. 即存在 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 且 $\alpha_k \neq 0$ 使得

$$\alpha_k A^k + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 E = O. \quad (1)$$

我们有下述结论:

命题 9.4 利用以上记号, 则 A 可逆当且仅当 $\alpha_0 \neq 0$. 此时

$$A^{-1} = -\alpha_0^{-1}(\alpha_1 E + \dots + \alpha_k A^{k-1}).$$

证明. 设 $\alpha_0 \neq 0$. 由 (1) 可知,

$$A(\alpha_1 E + \dots + \alpha_k A^{k-1}) = -\alpha_0 E \implies \underbrace{A(-\alpha_0^{-1})(\alpha_1 E + \dots + \alpha_k A^{k-1})}_B = E.$$

于是, A 可逆且 $B = A^{-1}$ (第二章第五讲命题 7.18).

反之, 设 A 可逆. 假设 $\alpha_0 = 0$. 则

$$A(\alpha_k A^{k-1} + \dots + \alpha_2 A + \alpha_1 E) = O.$$

两侧同乘 A^{-1} 得到

$$\alpha_k A^{k-1} + \dots + \alpha_2 A + \alpha_1 E = O.$$

因为 $\alpha_k \neq 0$, 我们得到与 k 的极小性相矛盾的结果. \square

例 9.5 设

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

确定 A_n 是否可逆并当可逆时计算 A_n^{-1} .

解. 注意到 E_n 和 A_n 在 \mathbb{R} 上“线性无关”. 计算

$$\begin{aligned} A_n^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n & n-4 & n-4 & \cdots & n-4 & n-4 \\ n-4 & n & n-4 & \cdots & n-4 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-4 & n-4 & n-4 & \cdots & n & n-4 \\ n-4 & n-4 & n-4 & \cdots & n-4 & n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2n-4) - (n-4) & n-4 & \cdots & n-4 \\ n-4 & (2n-4) - (n-4) & \cdots & n-4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-4 & n-4 & \cdots & (2n-4) - (n-4) \end{pmatrix} \\ &= (2n-4)E_n - (n-4)A_n. \end{aligned}$$

我们得到 $A_n^2 + (n-4)A_n - (2n-4)E_n = O$. 由命题 9.4 可

知, A_2 不可逆且 $n \neq 2$ 时, A_n 可逆. 此时,

$$A_n^{-1} = \frac{1}{2n-4}(A_n + (n-4)E_n).$$

10 矩阵分块

10.1 基本公式

引理 10.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$. 令

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix}, \quad B = (B_1, \dots, B_q).$$

则 $AB = (A_k B_\ell)_{p \times q}$.

证明. 断言:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_p B \end{pmatrix}.$$

断言的证明. 根据引理 9.1. 我们计算

$$(AB)^t = B^t A^t = B^t (A_1^t, \dots, A_p^t) = (B^t A_1^t, \dots, B^t A_p^t).$$

于是,

$$AB = (B^t A_1^t, \dots, B^t A_p^t)^t = \begin{pmatrix} (B^t A_1^t)^t \\ \vdots \\ (B^t A_p^t)^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_p B \end{pmatrix}.$$

断言成立.

由此和引理 9.1 可知,

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_p B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(B_1, \dots, B_q) \\ \vdots \\ A_p(B_1, \dots, B_q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & \dots & A_1 B_q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_p B_1 & \dots & A_p B_q \end{pmatrix}. \quad \square$$

引理 10.2 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$. 令

$$A = (A_1, \dots, A_k), \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{pmatrix},$$

其中 $A_i \in \mathbb{R}^{m \times s_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{s_i \times n}$, $i = 1, 2, \dots, k$. 则

$$AB = A_1 B_1 + \dots + A_k B_k.$$

证明. 设 $A = (a_{i,\ell})_{m \times s}$ 和 $B = (b_{\ell,j})_{s \times n}$.

先考虑 $k = 2$ 的情形. 令

$$C = (c_{i,j})_{m \times n} = AB \quad \text{和} \quad D = (d_{i,j})_{m \times n} = A_1 B_1 + A_2 B_2.$$

则对任意 $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$d_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{s_1} a_{i,\ell} b_{\ell,j} + \sum_{\ell=s_1+1}^{s_1+s_2} a_{i,\ell} b_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^s a_{i,\ell} b_{\ell,j} = c_{i,j}.$$

结论成立.

设 $k > 2$ 且结论对 $k - 1$ 成立. 记

$$\tilde{A} = (A_1, \dots, A_{k-1}), \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{k-1} \end{pmatrix}.$$

则 $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times (s-s_n)}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{(s-s_n) \times n}$. 于是

$$AB = \tilde{A}\tilde{B} + A_k B_k = A_1 B_1 + \dots + A_{k-1} B_{k-1} + A_k B_k,$$

其中第一个等式来自 $k = 2$ 时的结论, 第二个等式来自归纳假设. \square

定理 10.3 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$. 令

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\ell,1} & \cdots & A_{\ell,k} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k,1} & \cdots & B_{k,p} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{i,q} \in \mathbb{R}^{m_i \times s_q}$, $B_{q,j} \in \mathbb{R}^{s_q \times n_j}$, $i = 1, 2, \dots, \ell$, $j = 1, 2, \dots, p$, $q = 1, \dots, k$. 则

$$AB = \left(\sum_{q=1}^k A_{i,q} B_{q,j} \right)_{1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq p}.$$

证明. 设

$$A_i = (A_{i,1}, \dots, A_{i,k}), \quad i = 1, \dots, \ell, \quad B_j = \begin{pmatrix} B_{1,j} \\ \vdots \\ B_{k,j} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, p.$$

根据引理 10.1,

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_\ell \end{pmatrix} (B_1, \dots, B_p) = (A_i B_j)_{1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq p}.$$

根据引理 10.2,

$$A_i B_j = (A_{i,1}, \dots, A_{i,k}) \begin{pmatrix} B_{1,j} \\ \vdots \\ B_{k,j} \end{pmatrix} = \sum_{q=1}^k A_{i,q} B_{q,j}. \quad \square$$

例 10.4 设分块对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & O & \cdots & O \\ O & D_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & D_k \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}),$$

其中 $D_i \in M_{n_i}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, k$. 则对任意 $m \in \mathbb{Z}^+$,

$$A^m = \begin{pmatrix} D_1^m & O & \cdots & O \\ O & D_2^m & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & D_k^m \end{pmatrix}.$$

例 10.5 设分块对角矩阵

$$P = \begin{pmatrix} M & O \\ O & N \end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{R}),$$

其中 $M \in M_p(\mathbb{R})$, $N \in M_q(\mathbb{R})$, $p + q = m$. 设

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

其中 $A_{1,1}$ 有 p 行, $A_{2,2}$ 有 q 行. 则

$$PA = \begin{pmatrix} MA_{1,1} & MA_{1,2} \\ NA_{2,1} & NA_{2,2} \end{pmatrix}.$$

类似地, 设

$$Q = \begin{pmatrix} S & O \\ O & T \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}),$$

其中 S 的行数与 $A_{1,1}$ 的列数相同, T 的行数与 $A_{2,2}$ 的列数相同. 则

$$AQ = \begin{pmatrix} A_{1,1}S & A_{1,2}T \\ A_{2,1}S & A_{2,2}T \end{pmatrix}.$$

应用打洞引理时, 下列公式是有用的. 其证明是上一讲引理 10.1 的简单应用.

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r \times p} \\ O_{q \times r} & O_{q \times p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ O_{q \times r} \end{pmatrix} (E_r, O_{r \times p}). \quad (2)$$

例 10.6 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 计算 $X \in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = AXA$, $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$.

解. 设 $r = \text{rank}(A)$. 如果 $r = 0$, 则 X 可以是任何 $M_n(\mathbb{R})$ 中的矩阵. 如果 $r = n$, 则 A 可逆, 故 $X = A^{-1}$.

设 $r > 0$ 且 $r < n$. 根据打洞引理, 存在可逆矩阵 $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(n-r) \times r} & O_{n-r} \end{pmatrix}.$$

于是, 原方程等价于

$$P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix} Q^{-1} = P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix} Q^{-1} X P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

令 $Y = Q^{-1} X P^{-1}$. 则原方程变为

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix}.$$

令

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} \end{pmatrix},$$

其中 $Y_{1,1} \in M_r(\mathbb{R})$, $Y_{1,2} \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $Y_{2,1} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$ 和 $Y_{2,2} \in M_{n-r}(\mathbb{R})$. 则上述方程变为:

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix}.$$

即 $Y_{1,1} = E_r$, 而 $Y_{1,2}, Y_{2,1}, Y_{2,2}$ 是自由矩阵. 由此得出

$$X = Q \begin{pmatrix} E_r & Y_{1,2} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} \end{pmatrix} P,$$

其中 $Y_{1,2} \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $Y_{2,1} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$ 和 $Y_{2,2} \in M_{n-r}(\mathbb{R})$ 是任意矩阵.

10.2 矩阵秩的（不）等式

引理 10.7 设矩阵 M 具有以下四种分块形式之一

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}.$$

则 $\text{rank}(M) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ 且当 $C = O$ 时等号成立.

证明. 这四种形式可以通过第一类初等变换和转置互相转化. 因为初等变换和转置不改变矩阵的秩, 所以不妨假设

$$M = \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}.$$

设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$. 设 $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(p)}$ 是 $V_c(A)$ 的一组基, $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(q)}$ 是 $V_c(B)$ 的一组基.

断言. 列向量 $\vec{M}^{(1)}, \dots, \vec{M}^{(p)}, \vec{M}^{(n+1)}, \dots, \vec{M}^{(n+q)}$ 线性无关.

断言的证明. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1 \vec{M}^{(1)} + \dots + \alpha_p \vec{M}^{(p)} + \beta_1 \vec{M}^{(n+1)} + \dots + \beta_q \vec{M}^{(n+q)} = \mathbf{0}_{m+k}.$$

则

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \vec{A}^{(1)} \\ \vec{C}^{(1)} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_p \begin{pmatrix} \vec{A}^{(p)} \\ \vec{C}^{(p)} \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \vec{B}^{(1)} \end{pmatrix} + \dots + \beta_q \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \vec{B}^{(q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_k \end{pmatrix}.$$

于是, $\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_p \vec{A}^{(p)} = \mathbf{0}_m$. 故 $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$.

进而 $\beta_1 \vec{B}^{(n+1)} + \dots + \beta_q \vec{B}^{(n+q)} = \mathbf{0}_k$. 故 $\beta_1 = \dots = \beta_q = 0$.

断言成立.

由断言可知, $\text{rank}(M) \geq p + q = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

设 $C = O_{k \times n}$. 当 $j \in \{1, \dots, n\}$ 时,

$$\vec{M}^{(j)} = \begin{pmatrix} \vec{A}^{(j)} \\ \mathbf{0}_k \end{pmatrix} \implies \vec{M}^{(j)} \in \langle \vec{M}^{(1)}, \dots, \vec{M}^{(p)} \rangle.$$

类似地, 当 $j \in \{n+1, \dots, n+\ell\}$ 时,

$$\vec{M}^{(j)} \in \langle \vec{M}^{(n+1)}, \dots, \vec{M}^{(n+q)} \rangle.$$

根据断言, $\text{rank}(M) = p + q = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$. \square

推论 10.8 设上述引理中 A 和 B 是可逆方阵, 则 M 也是可逆方阵.

证明. 设 $A \in M_m(\mathbb{R})$ 和 $B \in M_n(\mathbb{R})$. 则 $M \in M_{m+n}(\mathbb{R})$. 则 $\text{rank}(M) \leq m + n$ (第二章第三讲例 3.10). 由上述引理,

$\text{rank}(M) \geq m + n$. 故 $\text{rank}(M) = m + n$. 于是, M 可逆(第二章第五讲定理 7.14). \square

例 10.9 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$. 证明

$$\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - s.$$

证明. 只要证 $\text{rank}(AB) + s \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$. 设

$$M = \begin{pmatrix} AB & O \\ O & E_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+s) \times (n+s)}.$$

根据引理 10.7, $\text{rank}(M) = \text{rank}(AB) + s$. 我们计算

$$N := \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_s \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & O \\ O & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & A \\ O & E_s \end{pmatrix},$$

$$P := N \begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & A \\ O & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A \\ -B & E_s \end{pmatrix}.$$

因为矩阵乘法不可能增加秩, 所以 $\text{rank}(M) \geq \text{rank}(P)$.

由引理 10.7 得出,

$$\text{rank}(M) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(-B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

例 10.10 (Sylvester 等式) 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. 证明:

$$\text{rank}(E_m + AB) + n = \text{rank}(E_n + BA) + m.$$

证明. 设

$$M = \begin{pmatrix} E_m + AB & O \\ O & E_n \end{pmatrix} \in M_{m+n}(\mathbb{R}).$$

我们计算

$$N := \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}}_{C_1} M = \begin{pmatrix} E_m + AB & A \\ O & E_n \end{pmatrix},$$

$$P := N \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & O \\ -B & E_n \end{pmatrix}}_{C_2} = \begin{pmatrix} E_m & A \\ -B & E_n \end{pmatrix},$$

$$Q := \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & O \\ B & E_n \end{pmatrix}}_{C_3} P = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n + BA \end{pmatrix},$$

$$R := Q \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix}}_{C_4} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n + BA \end{pmatrix}.$$

注意到 $C_1, C_2, C_3, C_4 \in M_{m+n}(\mathbb{R})$ 且引理 10.7 蕴含

$$\text{rank}(C_i) \geq \text{rank}(E_m) + \text{rank}(E_n) = m + n.$$

故 C_1, C_2, C_3, C_4 都满秩. 根据第二章第九讲推论 6.27,

$$\text{rank}(M) = \text{rank}(R).$$

再由引理 10.7 可知,

$$\text{rank}(M) = \text{rank}(R) \implies \text{rank}(E_m + AB) + n = \text{rank}(E_n + BA) + m.$$

第三章 行列式

1 多重线性斜对称函数

在本节中, 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 \mathbb{R}^n 的标准基.

1.1 \mathbb{R}^n 上的多重线性函数

定义 1.1 映射:

$$\begin{aligned} f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) &\longmapsto f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \end{aligned}$$

称为 m 重线性的, 如果对任意 $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 我们有

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &= \alpha f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &+ \beta f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m). \end{aligned}$$

例 1.2 一重线性函数就是 \mathbb{R}^n 上的线性函数. 设

$$\alpha_1 = f(\mathbf{e}_1), \dots, \alpha_n = f(\mathbf{e}_n) \in \mathbb{R}.$$

则

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

例 1.3 设

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

则 f 是 \mathbb{R}^2 上的二重线性函数.

验证. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

则

$$\begin{aligned} f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{y}) &= \det \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 & y_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha u_1 + \beta v_1)y_2 - (\alpha u_2 + \beta v_2)y_1 \\ &= \alpha(u_1y_2 - u_2y_1) + \beta(v_1y_2 - v_2y_1) \\ &= \alpha \det \begin{pmatrix} u_1 & y_1 \\ u_2 & y_2 \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} v_1 & y_1 \\ v_2 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{v}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

类似地, 我们可验证 $f(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$.

故 f 是二重线性函数.

例 1.4 设 f 是 \mathbb{R}^n 上的二重线性函数, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. 展开 $f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y})$.

解. 利用多重线性计算:

$$\begin{aligned} &f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) \\ &= \alpha f(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{v}, \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) \quad (\text{关于第一个变元线性}) \\ &= \alpha(\lambda f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{u}, \mathbf{y})) + \beta(\lambda f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{v}, \mathbf{y})) \\ &\quad (\text{关于第二个变元线性}) \\ &= \alpha \lambda f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + \alpha \mu f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + \beta \lambda f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + \beta \mu f(\mathbf{v}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

特别地

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{y})$$

和

$$f(\alpha \mathbf{u}, \alpha \mathbf{x}) = \alpha^2 f(\mathbf{u}, \mathbf{x}).$$

引理 1.5 设 f 是 \mathbb{R}^n 上 m 重线性函数, $k \in \{1, \dots, m\}$. 则

$$f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) = 0.$$

证明. 我们计算

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &= f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0} + \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &= f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) + f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &\implies f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

令

$$f(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_m}) = a_{j_1, j_2, \dots, j_m}, \quad (3)$$

其中 $j_1, j_2, \dots, j_m \in \{1, 2, \dots, n\}$. 我们利用这 n^m 个实数来计算一个 m 重线性函数的表达式. 再设

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^n x_{i,j} \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

则

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &= f\left(\sum_{j_1=1}^n x_{1,j_1} \mathbf{e}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n x_{2,j_2} \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \sum_{j_m=1}^n x_{m,j_m} \mathbf{e}_{j_m}\right) \\ &= \sum_{j_1=1}^n x_{1,j_1} f\left(\mathbf{e}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n x_{2,j_2} \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \sum_{j_m=1}^n x_{m,j_m} \mathbf{e}_{j_m}\right) \\ &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n x_{1,j_1} x_{2,j_2} f\left(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \sum_{j_m=1}^n x_{m,j_m} \mathbf{e}_{j_m}\right) \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \cdots \sum_{j_m=1}^n x_{1,j_1} x_{2,j_2} \cdots x_{m,j_m} f(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_m}) \end{aligned}$$

故

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \cdots \sum_{j_m=1}^n a_{j_1, j_2, \dots, j_m} x_{1, j_1} x_{2, j_2} \cdots x_{m, j_m}. \quad (4)$$