第三章　行列式

1.2　$\mathbb{R}^n$ 上的多重斜对称线性函数

定义 1.7 映射:

$$\begin{aligned} f: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{m} &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) &\mapsto f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) \end{aligned}$$

称为m 重斜对称的, 如果对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$,

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \ldots, \mathbf{x}_m) \\ &= -f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{j+1}, \ldots, \mathbf{x}_m). \end{aligned}$$

二阶行列式是 $\mathbb{R}^2$ 上 2 重斜对称的. 这是因为

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}.$$

引理 1.8 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 m 重斜对称函数. 如果 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ 中有两个向量相等, 则 $f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) = 0$.

证明. 不妨设 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 := \mathbf{u}$. 因为

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_m) = -f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_m),$$

所以

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_m) &= -f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_m) \\ &\Longrightarrow 2f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_m) = 0. \end{aligned}$$

因为 $2 \neq 0$, 所以 $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_m) = 0$. $\square$

设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上 n 重斜对称线性函数. 我们利用上一节 $m = n$ 时公式 (3) 和 (4) 推导 f 的表达式. 由引理 1.8, 如果下标 $j_1, \ldots, j_n$ 中有两个相同, 则 $a_{j_1,\ldots,j_n} = 0$. 若 $j_1, \ldots, j_n$ 两两不同, 则这些下标对应一个置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}.$$

即 $(j_1, \ldots, j_n) = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$. 再根据上次讲义 (4), 我们有

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)} x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)}. \tag{1}$$

设 $w = f(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. 我们来研究 w 和 $a_{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)}$ 之间的关系. 根据上一节公式 (4),

$$a_{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)} = f(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}).$$

下面我们证明:

断言. $a_{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)} = \epsilon_\sigma w$.

证明. 设 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$, 其中 $\tau_1, \ldots, \tau_k$ 是对换. 如果 $k = 1$, 则可设 $\sigma = (i, j)$. 于是,

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)} &= f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{j+1}, \ldots, \mathbf{x}_n) \\ &= -f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \ldots, \mathbf{x}_n) \\ &= -w. \end{aligned}$$

断言在 $k=1$ 时成立. 设 $k>1$ 且断言对 $k-1$ 成立. 考虑 k 时. 令 $\pi=\tau_2\cdots\tau_k$. 则 $\sigma=\tau_1\pi$. 我们有

$$\begin{aligned}
a_{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)} &= f(\mathbf{e}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma(n)}) \\
&= f(\mathbf{e}_{\tau_1\pi(1)},\ldots,\mathbf{e}_{\tau_1\pi(n)}) \\
&= -f(\mathbf{e}_{\pi(1)},\ldots,\mathbf{e}_{\pi(n)}) \\
&= -\epsilon_\pi f(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n) \quad (\text{归纳假设}) \\
&= \epsilon_\sigma w.
\end{aligned}$$

断言成立.

由此断言和 (1) 可知

$$f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n)=w\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon_\sigma x_{1,\sigma(1)}x_{2,\sigma(2)}\cdots x_{n,\sigma(n)}. \tag{2}$$

于是, 每个 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 重斜线性函数都具有形式 (2) 且具有上述形式的函数必然 n 重斜线性, 其中 w 可取任意实数.

2 行列式的定义和基本性质

定义 2.1 行列式函数:

$$\begin{aligned}
\det:\ \underbrace{\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n}_{n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) &\mapsto \textstyle\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon_\sigma x_{1,\sigma(1)}\cdots x_{n,\sigma(n)},
\end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{j,1} \\ \vdots \\ x_{j,n} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

由 (2) 可知, det 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 重线性斜对称函数.

注解 2.2 根据 (1) 中 w 的定义, $\det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$.

定义 2.3 设 $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 矩阵 A 的行列式是

$$\det\left(\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}\right). \quad \textit{(函数版)}.$$

令 $A = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$, 其中 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ 由定义 2.1 给出. 则

$$a_{i,j} = x_{j,i}, \quad i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

故

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}. \quad \text{(系数版)} \qquad (3)$$

矩阵 A 的行列式记为 $\det(A)$ 或 $|A|$.

事实上

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

也成立. 验证如下:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),\sigma^{-1}\sigma(1)}\cdots a_{\sigma(n),\sigma^{-1}\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon_{\sigma^{-1}} a_{\sigma(1),\sigma^{-1}\sigma(1)}\cdots a_{\sigma(n),\sigma^{-1}\sigma(n)} \quad (\sigma^{-1}\text{ 和 }\sigma\text{ 奇偶性相同}) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon_{\sigma^{-1}} a_{1,\sigma^{-1}(1)}\cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \quad (\{1,\ldots,n\}=\{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)\}) \\
&= \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \epsilon_{\sigma^{-1}} a_{1,\sigma^{-1}(1)}\cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \quad \sigma^{-1}\text{ 遍历整个 }S_n \\
&= \sum_{\tau\in S_n} \epsilon_\tau a_{1,\tau(1)}\cdots a_{n,\tau(n)}.
\end{aligned}$$

验证完毕. 由此可知,

命题 2.4 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则 $\det(A)=\det(A^t)$.

例 2.5 根据注解 *2.2*,

$$\det(E_n)=\det(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)=1.$$

由函数版的定义可知, $\det(A)$ 是关于 A 的列的 n 重线性斜函数. 由此得出下列基本性质.

命题 2.6 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 和 $j\in\{1,\ldots,n\}$. 令

$$B=\left(\vec{A}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(j-1)},\sum_{k=1}^{\ell}\alpha_k\mathbf{v}_k,\vec{A}^{(j+1)},\ldots\vec{A}^{((n)}\right),$$

其中 $\alpha_1, \dots \alpha_\ell \in \mathbb{R}$ 且 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell \in \mathbb{R}^n$. 则

$$\det(B) = \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_i \det\left(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(j-1)}, \mathbf{v}_k, \vec{A}^{(j+1)}, \dots \vec{A}^{((n)}\right).$$

推论 2.7 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 和 $i \in \{1, \dots, n\}$. 令

$$C = \det \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_{i-1} \\ \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \mathbf{w}_k \\ \vec{A}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{A}_n \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha_1, \dots \alpha_\ell \in \mathbb{R}$ 且 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\ell \in \mathbb{R}^{1\times n}$. 则

$$\det(C) = \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_i \det \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_{i-1} \\ \mathbf{w}_k \\ \vec{A}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{A}_n \end{pmatrix}.$$

证明. 由命题 2.4 可知,

$$\det(C) = \det(C^t) = \det\left(\vec{A}_1^t, \dots, \vec{A}_{i-1}^t, \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \mathbf{w}_k^t, \vec{A}_{i+1}^t, \dots \vec{A}_n^t\right).$$

根据命题 2.6

$$\det(C)=\sum_{k=1}^{\ell}\alpha_k\det\left(\vec{A}_1^t,\ldots,\vec{A}_{i-1}^t,\mathbf{w}_k^t,\vec{A}_{i+1}^t,\ldots\vec{A}_n^t\right).$$

再次利用命题 2.4 即可. □

下面的推论是关于数乘的情形

推论 2.8 *(i) 如果 $\vec{A}^{(j)}=\alpha\mathbf{v}$ 或 $\vec{A}_i=\alpha\mathbf{w}$, 其中 $\alpha\in\mathbb{R}$, $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^{1\times n}$. 则*

$$\det(A)=\alpha\det\left(\vec{A}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(j-1)},\mathbf{v},\vec{A}^{(j+1)},\ldots,\vec{A}^{(n)}\right),$$

或

$$\det(A)=\alpha\det\begin{pmatrix}\vec{A}_1\\ \vdots\\ \vec{A}_{i-1}\\ \mathbf{w}\\ \vec{A}_{i+1}\\ \vdots\\ \vec{A}_n\end{pmatrix}.$$

(ii) $\det(\alpha A)=\alpha^n\det(A)$.

证明. (i) 由命题 2.6 和推论 2.6 直接可得.

(ii) 利用归纳法可得

$$\begin{aligned}
\det(\alpha A) &= \det(\alpha\vec{A}^{(1)}, \alpha\vec{A}^{(2)}, \ldots, \alpha\vec{A}^{(n)}) \\
&= \alpha\det(\vec{A}^{(1)}, \alpha\vec{A}^{(2)}, \ldots, \alpha\vec{A}^{(n)}) \\
&= \alpha^2\det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \alpha\vec{A}^{(3)} \ldots, \alpha\vec{A}^{(n)}) \\
&\vdots \\
&= \alpha^n\det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}) \\
&= \alpha^n\det(A). \quad \square
\end{aligned}$$

例 2.9 证明*: $D_n = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 的行列式等于 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$.*

证明. 我们计算

$$\begin{aligned}
\det(D_n) &= \det(\lambda_1\mathbf{e}_1, \lambda_2\mathbf{e}_2, \ldots, \lambda_n\mathbf{e}_n) \\
&= \lambda_1\det(\mathbf{e}_1, \lambda_2\mathbf{e}_2, \ldots, \lambda_n\mathbf{e}_n) \\
&= \lambda_1\lambda_2\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \lambda_3\mathbf{e}_3 \ldots, \lambda_n\mathbf{e}_n) \\
&\vdots \\
&= \lambda_1\cdots\lambda_n\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = \lambda_1\cdots\lambda_n.
\end{aligned}$$

特别有 $\det(\lambda E_n) = \lambda^n$.

例 2.10 *设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 如果 A 中有一列或一行为零向量, 则 $\det(A) = 0$.*

证明. 因为 A 关于列说多重线性的, 所以 A 有一列为零向量蕴含 $\det(A) = 0$ (上一讲引理 1.5). 另一个结论通过转秩可得. $\square$

例 2.11 设 $A \in \mathrm{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ 斜对称. 证明: $\det(A) = 0$.

证明. 因为 $A^t = -A$, 所以 $\det(A) = \det(-A)$. 根据推论 2.7 (ii), $\det(-A) = (-1)^{2n+1}\det(A) = -\det(A)$. 于是, $\det(A) = -\det(A)$. 从而 $2\det(A) = 0$. 因为 $2 \neq 0$, 所以 $\det(A) = 0$. □

行列式函数的斜对性导致:

命题 2.12 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 如果 B 由 A 交换两不同列或两不同行得到, 则 $\det(B) = -\det(A)$.

证明. 设 B 由 A 交换两不同列得到. 因为 $\det(A)$ 关于列是斜对称的, 所以 $\det(B) = -\det(A)$. 另一个结论可由转秩得到. □

下述推论给出行列式基于多重线性和斜对称的性质.

推论 2.13 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) 如果方阵 A 中有两列(行)相同, 则 $\det(A) = 0$;

(ii) 如果 A 中某列(行)是其它列(行)的线性组合, 则 $\det(A) = 0$.

(iii) 把 A 中某一列(行)的倍式加到另一列(行)上得到矩阵 B, 则 $\det(B) = \det(A)$.

证明. 我们只证明列的情形, 行的情形可由列的情形和转秩得出.

(i) 由命题 2.12 可知, 交换 A 中相同的两列可知, $\det(A) = -\det(A)$. 故 $2\det(A) = 0$. 因为 $2 \neq 0$, 所以 $\det(A) = 0$.

(ii) 不妨设 $\vec{A}^{(1)} = \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \vec{A}^{(j)}$, 其中 $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. 根据命题 2.6

$$\det(A) = \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \det\left(\vec{A}^{(j)}, \vec{A}^{(2)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}\right).$$

由 (i) 可知, $\det\left(\vec{A}^{(j)}, \vec{A}^{(2)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}\right) = 0$. 故 $\det(A) = 0$.

(iii) 设 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ 且 $i \neq j$. 令

$$B = \left(\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(i)}, \ldots, \vec{A}^{(j)} + \alpha \vec{A}^{(i)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}\right),$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}$. 由命题 2.6 和 (i) 可知,

$$\begin{aligned}\det(B) = & \det\left(\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(i)}, \ldots, \vec{A}^{(j)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}\right) \\ & + \alpha \det\left(\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(i)}, \ldots, \vec{A}^{(i)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}\right) = \det(A) \quad \square.\end{aligned}$$

例 2.14 *计算 n 阶初等矩阵的行列式.*

解. 由命题 *2.12* 可知, $\det(F_{i,j}^{(n)}) = -1$ 在 $i \neq j$ 时成立. 否则其行列式等于 1. 由推论 *2.13 (iii)* 可知, $\det(F_{i,j}^{(n)})(\alpha)=1$. 由推论 *2.7 (i)* 可知, $\det(F_i^{(n)}(\lambda)) = \lambda$. $\square$

下面我们来研究系数版的行列式定义.

例 2.15 设

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} \det(A_2) &= \epsilon_e a_{1,e(1)} a_{2,e(2)} + \epsilon_{(12)} a_{1,(12)(1)} a_{2,(12)(2)} \\ &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A_3) &= \epsilon_e a_{1,e(1)} a_{2,e(2)} a_{3,e(3)} + \epsilon_{(12)} a_{1,(12)(1)} a_{2,(12)(2)} a_{3,(12)(3)} \\ &+ \epsilon_{(13)} a_{1,(13)(1)} a_{2,(13)(2)} a_{3,(13)(3)} + \epsilon_{(23)} a_{1,(23)(1)} a_{2,(23)(2)} a_{3,(23)(3)} \\ &+ \epsilon_{(123)} a_{1,(123)(1)} a_{2,(123)(2)} a_{3,(123)(3)} \\ &+ \epsilon_{(213)} a_{1,(213)(1)} a_{2,(213)(2)} a_{3,(213)(3)} \\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} \\ &- a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} \\ &+ a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} \\ &+ a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}. \end{aligned}$$

命题 2.16 设

$$T_u = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

和

$$T_\ell = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{2,1} & \ell_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n,1} & \ell_{n,2} & \ell_{n,3} & \cdots & \ell_{n,n} \end{pmatrix}$$

则

$$\det(T_u) = u_{1,1}u_{2,2}\cdots u_{n,n} \quad \text{和} \quad \det(T_\ell) = \ell_{1,1}\ell_{2,2}\cdots \ell_{n,n}.$$

证明. 我们来证明上三角情形, 下三角情形类似.

设 $T_u = (u_{i,j})_{n\times n}$. 则当 $i < j$ 时, $u_{i,j} = 0$. 在 $\det(T_u)$ 的和式表示 (3) 中的一项是

$$a_\sigma = \epsilon_\sigma u_{1,\sigma(1)} \cdots u_{n,\sigma(n)},$$

其中 $\sigma \in S_n$. 如果存在某个 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 使得 $i > \sigma(i)$, 则 $a_\sigma = 0$. 于是, $a_\sigma \neq 0$ 蕴含 $i \leq \sigma(i)$ 对所有 $i = 1, 2 \ldots, n$ 成立. 故 σ 必然是恒同映射. 我们得到

$$\det(T_u) = a_e = \epsilon_e u_{1,e(1)} \cdots u_{n,e(n)} = u_{1,1} \cdots u_{n,n}. \quad \square$$

计算行列式的一个基本方法是通过第一和第二类初等变换把给定的行列式对应的矩阵化为上三角或下三角形矩阵, 然后利用命题 2.16 计算给定行列式的值. 需要注意的是: 应用一次第一类初等变换行列式的值会变号(命题 2.12); 而应用一次第二类初等变换行列式的值不变(推论 2.13 (iii)). 当利用第三类初等变换时, 行列式要乘以适当的实数(推论 2.7 (i)).

例 2.17 计算矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的行列式的值.

证明. 利用第二类初等行变换可得

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -8.$$

利用第一类初等行变换可得

$$\det(B) = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

例 2.18 展开 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

的行列式.

解. 多次应用第二类初等列变换性质可得

$$\det(A)=\begin{pmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

根据行列式关于第一列是线性的得

$$\det(A)=(a+(n-1)b)\begin{pmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

再利用第二类初等行变换, 我们有

$$\det(A)=(a+(n-1)b)\begin{pmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}=(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

定理 2.19 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则 $\det(A) \neq 0$ 当且仅当 $\mathrm{rank}(A) = n$.

证明. 设 $\det(A) \neq 0$. 根据推论 2.13 (ii), A 中的任何一列都不是其它列的线性组合. 故 A 的列线性无关. 由此可知, $\mathrm{rank}(A) = n$.

反之, 设 $\mathrm{rank}(A) = n$. 则通过第一和第二类初等行变换, 我们可以把 A 变成阶梯型(上三角)矩阵, 其中 $u_{1,1}, u_{2,2}, \ldots, u_{n,n}$ 都不等于零.

$$T_u = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}.$$

于是, $\det(A) = \pm \det(T_u) \neq 0$. □

推论 2.20 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则 $\det(A) \neq 0$ 当且仅当 A 可逆.

证明. 由上述定理和第二章第五讲定理 7.14 直接可得. □

例 2.21 证明实数上的奇数阶斜对称矩阵都不可逆.

证明. 由例 *2.11* 可知, 任何奇数阶斜对称矩阵的行列式都等于零. 根据上述推论, 奇数阶斜对称矩阵都不可逆.

3 行列式的进一步性质

3.1 行列式按一行(列)展开

定义 3.1 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 去掉 A 中第 i 行和第 j 列得到的 $(n-1)$ 阶方阵的行列式称为 A 关于 i 行和 j 列的$(n-1)$ 阶余子式*(co-minor)*, 记为 $M_{i,j}$. 而 $A_{i,j} := (-1)^{i+j} M_{i,j}$ 称为 A 关于 i 行和 j 列的代数余子式.

例 3.2 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

则

$$M_{1,1} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad A_{2,3} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = -M_{2,3}.$$

定理 3.3 设 $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则对于任意的 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\underbrace{\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} A_{i,k}}_{\text{按一行展开}} \quad \text{和} \quad \underbrace{\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} A_{k,j}}_{\text{按一列展开}}.$$

证明. 断言 *1.* 设 A 中最后一行中前 $(n-1)$ 个元素都等于零. 则 $\det(A) = a_{n,n} A_{n,n}$.

断言 *1* 的证明. 由行列式的定义可知

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon_\sigma a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n-1,\sigma(n-1)} a_{n,\sigma(n)}.$$

因为当 $n \neq \sigma(n)$ 时, $a_{n,\sigma(n)} = 0$, 所以

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n, \sigma(n)=n} \epsilon_\sigma a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n-1,\sigma(n-1)} a_{n,n}.$$

故

$$\det(A) = a_{n,n} \sum_{\tau\in S_{n-1}} \epsilon_\tau a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n-1,\tau(n-1)} = a_{n,n} M_{n,n} = a_{n,n} A_{n,n}.$$

断言 1 成立.

断言 *2*. 设 A 中第 i 行中只有第 j 个元素非零. 则 $\det(A) = a_{i,j} A_{i,j}$.

断言 *2* 的证明. 把 A 中第 i 行与 $\vec{A}_{i+1}, \ldots, \vec{A}_n$ 逐个对调, 然后把所得矩阵的第 j 列与第 $(j+1)$ 列至 第 n 列逐个对调, 我们得到矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,j-1} & a_{n-1,j+1} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{n-1,j} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i,j} \end{pmatrix}.$$

由断言 1, $\det(B) = a_{i,j}M_{i,j}$. 由行列式性质 (S1),

$$\det(B) = (-1)^{n-i+n-j}\det(A) = (-1)^{i+j}\det(A) \implies \det(A) = a_{i,j}A_{i,j}.$$

断言 2 成立.

下面考虑一般情形. 由行列式的多重线性和断言 2 可知

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}\det\begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_{i-1} \\ 0\cdots 0, a_{i,j}, 0, \cdots 0 \\ \vec{A}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{A}_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}.$$

我们证明了按行展开的公式. 按列展开的公式可以类似证明，或通过行列式的转置公式和行展开公式证明. □

例 3.4 展开行列式

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

解. 利用上述定理证明中的断言 *2*, 我们有

$$D=-2\begin{vmatrix}5&3&-1&2\\0&-2&3&1\\0&-4&-1&4\\0&2&3&5\end{vmatrix}=-10\begin{vmatrix}-2&3&1\\-4&-1&4\\2&3&5\end{vmatrix}.$$

再利用第二类初等行变换得

$$D=-10\begin{vmatrix}-2&3&1\\0&-7&2\\0&6&6\end{vmatrix}=20\times 6\times(-7-2)=-1080.$$

例 3.5 *Vandermonde* 行列式. 设 $(\alpha_1,\beta_1),\ldots,(\alpha_n,\beta_n)\in\mathbb{R}^{1\times 2}$. 求次数为 $n-1$ 次实系数多项式

$$f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

使得

$$f(\alpha_i)=\beta_i,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

即

$$a_0+a_1\alpha_i+\cdots+a_{n-2}\alpha_i^{n-2}+a_{n-1}\alpha_i^{n-1}=\beta_i,\quad i=1,2,\ldots,n,$$

其中 $a_0,a_1,\ldots,a_{n-2},a_{n-1}$ 是 n 个未知数. 利用矩阵表示,

我们有

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-2} & \alpha_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

记 $V_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \det(A)$. 称之为关于 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 的 Vandermonde 行列式. 该行列式也简记为 V_n.

展开 V_n 有多种方法. 我们这里采用初等变换和数学归纳法. 当 $n = 2$ 时,

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1.$$

$$\begin{aligned} V_3 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \\ 0 & \alpha_3 - \alpha_1 & \alpha_3^2 - \alpha_1^2 \end{vmatrix} \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 0 & 1 & \alpha_2 + \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_3 + \alpha_1 \end{vmatrix} = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2). \end{aligned}$$

猜测: $V_n = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_j - \alpha_i)$. 设 $n > 3$ 且阶数小于 n 时

猜测成立. 当 n 时,

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^{n-2}(\alpha_1-\alpha_n)\\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2-\alpha_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-2} & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-2} & 0\end{vmatrix}\quad (\ AF_{n-1,n}(-\alpha_n)\ )$$

$$=\begin{vmatrix}1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-3}(\alpha_1-\alpha_n) & \alpha_1^{n-2}(\alpha_1-\alpha_n)\\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-3}(\alpha_2-\alpha_n) & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2-\alpha_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-3}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\\ 1 & \alpha_n & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$(\ AF_{n-1,n}(-\alpha_n)F_{n-2,n-1}(-\alpha_n)\ )$$

$$=\cdots$$

$$=\begin{vmatrix}1 & \alpha_1-\alpha_n & \cdots & \alpha_1^{n-3}(\alpha_1-\alpha_n) & \alpha_1^{n-2}(\alpha_1-\alpha_n)\\ 1 & \alpha_2-\alpha_n & \cdots & \alpha_2^{n-3}(\alpha_2-\alpha_n) & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2-\alpha_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & \alpha_{n-1}-\alpha_n & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-3}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$(\ AF_{n-1,n}(-\alpha_n)F_{n-2,n-1}(-\alpha_n)\cdots F_{1,2}(-\alpha_n)\ )$$

$$=(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n-1}(\alpha_i-\alpha_n)V(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}(\alpha_n-\alpha_i)V(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}(\alpha_n-\alpha_i)\prod_{1\le i<j\le n-1}(\alpha_j-\alpha_i)$$

$$=\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_j-\alpha_i).$$

猜测成立. 由此可知, A 满秩当且仅当 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 两两不同. 此时, 所求多项式存在且唯一.

例 3.6 计算

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解. 直接计算得 $D_1 = 2$, $D_2 = 3$,

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4.$$

猜测: $D_n = n + 1$.

设 $n > 3$ 且当阶数小于 n 时猜测成立. 按第一列展开

得

$$D_n = 2D_{n-1} - \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2D_{n-1} - D_{n-2} = 2n - (n-1) = n+1.$$

猜测成立.