例 2.8 考虑上一讲例 *2.7* 中的两个映射. 我们有

$$\int_a^x \left(\frac{d}{dt}f(t)\right)\,dt = f(x)-f(a) \quad \text{和} \quad \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x).$$

命题 2.9 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ 是双射. 则 $\phi^{-1} \in \mathrm{Hom}(W,V)$.

证明. 设 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, $\mathbf{v}_1 = \phi^{-1}(\mathbf{w}_1)$ 和 $\mathbf{v}_2 = \phi^{-1}(\mathbf{w}_2)$. 对任意的 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$,

$$\phi(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1\phi(\mathbf{v}_1) + \alpha_2\phi(\mathbf{v}_2) = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2.$$

于是

$$\phi^{-1}(\alpha_1\mathbf{w}_1+\alpha_2\mathbf{w}_2) = \alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2 = \alpha_1\phi^{-1}(\mathbf{w}_1)+\alpha_2\phi^{-1}(\mathbf{w}_2). \quad \square$$

定义 2.10 如果存在双射 $\phi \in \mathrm{Hom}(V,W)$, 则称 V 和 W 线性同构.

线性同构是等价关系, 其验证过程与验证群同构是等价关系类似 (见上学期第四章第一讲第 15 页).

例 2.11 线性空间 $\mathrm{Hom}(F^n, F^m)$ 与 $F^{m\times n}$ 线性同构. 设

$$\begin{array}{rcll} \Phi\colon \ \mathrm{Hom}(F^n,F^m) & \longrightarrow & F^{n\times m} & \\ \phi & \mapsto & A_\phi & (\phi\ \text{在标准基下的矩阵}) \end{array}$$

则 Φ 是双射. 具体验证见上学期第二章第四讲推论 *6.14*. 于是, Φ 是线性同构.

2.3 核核分解定理的推广

在本节中 V 是域 F 上的线性空间.

定理 2.12 设 $\mathcal{A}\in\mathrm{Hom}(V,V)$, $f\in F[x]$ 且 $f(\mathcal{A})=\mathcal{O}$. 如果

$$f = pq$$

其中 $p,q \in F[x]$ 互素, 则

$$V = \ker(p(\mathcal{A})) \oplus \ker(q(\mathcal{A})).$$

证明. 把本学期第一周第一讲核核分解定理的证明中的 F^n 换为 V 即可.

定理 2.13 设 $\mathcal{A}\in\mathrm{Hom}(V,V)$, $f\in F[x]$ 且 $f(\mathcal{A})=\mathcal{O}$. 如果

$$f = p_1 \cdots p_m,$$

其中 $p_1,\dots p_m \in F[x]$ 两两互素, 则

$$V = K_1 \oplus \cdots \oplus K_m,$$

其中 $K_i = \ker(p_i(\mathcal{A}))$, $i = 1,\dots,m$.

证明. 对 m 归纳. 当 $m = 1$ 时结论是平凡的. 设 $m > 1$ 且结论对 $m-1$ 成立. 令 $q = p_1 \cdots p_{m-1}$. 因为 $\gcd(p_i,p_m) = 1$, $i = 1,\dots,m$, 所以 $\gcd(q,p_m) = 1$. 根据上述定理,

$$V = W \oplus K_m, \quad \text{其中 } W = \ker(q(\mathcal{A})). \tag{1}$$

设 $\mathcal{B}=\mathcal{A}|_W$. 对任意 $\mathbf{w}\in W$, $\mathcal{B}(\mathbf{w})=\mathcal{A}(\mathbf{w})$. 故

$$q(\mathcal{A})(\mathcal{B}(\mathbf{w}))=q(\mathcal{A})\mathcal{A}(\mathbf{w})=\mathcal{A}q(\mathcal{A})(\mathbf{w})=\mathcal{A}(\mathbf{0})=\mathbf{0}.$$

于是, $\mathcal{B}(\mathbf{w})\in W$. 即 $\mathcal{B}\in \mathrm{Hom}(W,W)$. 对任意 $\mathbf{w}\in W$,

$$q(\mathcal{B})(\mathbf{w})=q(\mathcal{A})(\mathbf{w})=\mathbf{0}.$$

由此可知, $q(\mathcal{B})=\mathcal{O}$. 根据归纳假设, 我们有

$$W=\ker(p_1(\mathcal{B}))\oplus\cdots\oplus\ker(p_{m-1}(\mathcal{B})). \tag{2}$$

下面验证:

$$\ker(p_i(\mathcal{B}))=K_i,\quad i=1,\ldots,m-1. \tag{3}$$

设 $\mathbf{w}\in\ker(p_i(\mathcal{B}))$. 则 $\mathbf{0}=p_i(\mathcal{B})(\mathbf{w})=p_i(\mathcal{A})(\mathbf{w})$. 故 $\mathbf{w}\in K_i$. 故 $\ker(p_i(\mathcal{B}))\subset K_i$. 设 $\mathbf{v}\in K_i$. 则 $q(\mathcal{A})(\mathbf{v})=\mathbf{0}$. 故 $\mathbf{v}\in W$. 由此得出, $\mathbf{0}=p_i(\mathcal{A})(\mathbf{v})=p_i(\mathcal{B})(\mathbf{v})$. 从而, $\mathbf{v}\in\ker(p_i(\mathcal{B}))$. 故 $K_i\subset\ker(p_i(\mathcal{B}))$. 等式 (3) 成立.

根据等式 (1), (2) 和 (3), 定理成立. □

3 商空间

在本节中 V 是域 F 上的线性空间.

3.1 商空间

设 U 是 V 的子空间. 我们在 V 上定义如下等价关系.

定义 3.1 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 如果 $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in U$, 则称 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 关于 U 等价. 记为 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$.

我们验证 $\sim_U$ 是等价关系. 首先, $\mathbf{x}-\mathbf{x}=\mathbf{0} \in U$. 于是对任意的 $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{x}$. 自反性成立. 设 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$. 则 $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in U$. 于是 $\mathbf{y}-\mathbf{x} \in U$. 从而 $\mathbf{y} \sim_U \mathbf{x}$. 对称性成立. 设 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \sim_U \mathbf{z}$. 则 $\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{y}-\mathbf{z} \in U$. 于是

$$\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{y}-\mathbf{z}=\mathbf{x}-\mathbf{z} \in U.$$

于是 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{z}$. 传递性成立.

引理 3.2 设 $\mathbf{x} \in V$ 且 $[\mathbf{x}]$ 是 $\mathbf{x}$ 所在的等价类. 则

$$[\mathbf{x}]=\mathbf{x}+U.$$

证明. 设 $\mathbf{u} \in U$. 则 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{x}+\mathbf{u}$. 于是 $\mathbf{x}+\mathbf{u} \in [\mathbf{x}]$. 由此可知, $\mathbf{x}+U \subset [\mathbf{x}]$. 再设 $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}]$. 则 $\mathbf{y}-\mathbf{x} \in U$, 即存在 $\mathbf{u} \in U$ 使得 $\mathbf{y}-\mathbf{x}=\mathbf{u}$, 即 $\mathbf{y}=\mathbf{x}+\mathbf{u}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{x}+U$. 由此可知, $[\mathbf{x}] \subset \mathbf{x}+U$. □

由上述引理可知

$$V/\sim_U=\{\mathbf{v}+U \mid \mathbf{v} \in V\}.$$

为了化简符号, 我们用 V/U 记 $V/\sim_U$. 与剩余环类似, V 上的加法和数乘可诱导出 V/U 中的线性运算.

设 $\mathbf{x}+U, \mathbf{y}+U \in V/U$ 和 $\alpha \in F$. 定义:

$$(\mathbf{x}+U)+(\mathbf{y}+U)=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+U \quad \text{和} \quad \alpha(\mathbf{x}+U)=(\alpha\mathbf{x})+U.$$

下面我们来验证这两个运算的良定义. 设 $\mathbf{x}+U=\mathbf{x}'+U$ 和 $\mathbf{y}+U=\mathbf{y}'+U$. 则 $\mathbf{x}-\mathbf{x}', \mathbf{y}-\mathbf{y}' \in U$. 于是

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}-\mathbf{x}')+(\mathbf{y}-\mathbf{y}')=(\mathbf{x}+\mathbf{y})-(\mathbf{x}'+\mathbf{y}')\in U& \\
\Longrightarrow\ (\mathbf{x}+\mathbf{y}) \sim_U (\mathbf{x}'+\mathbf{y}')& \\
\Longrightarrow\ (\mathbf{x}+\mathbf{y})+U=(\mathbf{x}'+\mathbf{y}')+U.&
\end{aligned}$$

类似地, 对 $\alpha \in F$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}-\mathbf{x}' \in U &\Longrightarrow\ \alpha\mathbf{x}-\alpha\mathbf{x}' \in U \\
&\Longrightarrow\ \alpha\mathbf{x} \sim_U \alpha\mathbf{x}' \\
&\Longrightarrow\ (\alpha\mathbf{x})+U=(\alpha\mathbf{x}')+U.
\end{aligned}$$

由 V 中的运算规律可知, V/U 是域 F 上的线性空间, 其中的"零向量" 是 $\mathbf{0}+U=U$. 我们称 V/U 是 V 关于 U 的商空间.

3.2 自然的线性映射

设 $\pi_U : V \longrightarrow V/U$ 是自然投射, 即对任意的 $\mathbf{x} \in V$, $\pi_U(\mathbf{x})=\mathbf{x}+U$ (见上学期第一章讲义三第 12 页). 下面我

们来验证 π_U 是线性的. 对任意 $\alpha, \beta \in F$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$\begin{aligned}
\pi_U(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) + U && (\pi_U \text{ 的定义}) \\
&= ((\alpha\mathbf{x}) + U) + ((\beta\mathbf{y}) + U) && (V/U \text{ 中加法的定义}) \\
&= \alpha(\mathbf{x} + U) + \beta(\mathbf{y} + U) && (V/U \text{ 中数乘的定义}) \\
&= \alpha\pi_U(\mathbf{x}) + \beta\pi_U(\mathbf{y}) && (\pi_U \text{ 的定义}).
\end{aligned}$$

验证完毕.

设 $\phi : V \longrightarrow W$ 是从 V 到 F 上的线性空间 W 的线性映射. 则对任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{y}) \iff \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{x}-\mathbf{y} \in \ker(\phi) \iff \mathbf{x} \sim_{\ker(\phi)} \mathbf{y}.$$

由上学期第一章讲义三第 12 页定理 3.1 可知存在唯一的单射 $\bar{\phi} : V/\ker(\phi) \longrightarrow W$ 使得 $\phi = \bar{\phi} \circ \pi_{\ker(\phi)}$. 即下述图表交换.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_{\ker(\phi)}"] & W \\
V/\ker(\phi) \arrow[ur, "\bar{\phi}"] &
\end{tikzcd}$$

交换. 特别有 $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{im}(\bar{\phi})$. 设 $\mathbf{x} + \ker(\phi) \in V/\ker(\phi)$. 则

$$\phi(\mathbf{x}) = \bar{\phi} \circ \pi_{\ker(\phi)}(\mathbf{x}) = \bar{\phi}(\mathbf{x} + \ker(\phi)).$$

于是

$$\begin{array}{rccc}
\bar{\phi} : & V/\ker(\phi) & \longrightarrow & W \\
& \mathbf{x} + \ker(\phi) & \mapsto & \phi(\mathbf{x}).
\end{array}$$

定理 3.3 *(线性映射基本定理 I)* 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, 其中 W 是 F 上的线性空间. 则存在唯一的线性单射 $\bar{\phi}$ 使得 $\phi = \bar{\phi} \circ \pi_{\ker(\phi)}$. 特别地, $V/\ker(\phi)$ 与 $\mathrm{im}(\phi)$ 线性同构.

证明. 根据上文, 我们只需验证 $\bar{\phi}$ 是线性的.

令 $U = \ker(\phi)$. 设 $\alpha, \beta \in F$, $\mathbf{x} + U, \mathbf{y} + U \in V/U$. 则

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}(\alpha(\mathbf{x}+U) + \beta(\mathbf{y}+U)) &= \bar{\phi}((\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) + U) && (V/U \text{ 中的运算}) \\
&= \phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) && (\bar{\phi} \text{ 的定义}) \\
&= \alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y}) && (\phi \text{ 线性}) \\
&= \alpha\bar{\phi}(\mathbf{x}+U) + \beta\bar{\phi}(\mathbf{y}+U) && (\bar{\phi} \text{ 的定义}).
\end{aligned}$$

验证完毕. 因为 $\mathrm{im}(\bar{\phi}) = \mathrm{im}(\phi)$ 且 $\bar{\phi}$ 是单射, 所以把 $\bar{\phi}$ 看成从 $V/\ker(\phi)$ 到 $\mathrm{im}(\phi)$ 的映射是线性同构. □

推论 3.4 利用上述定理的假设和符号, 再设 ϕ 是满射. 则 $V/\ker(\phi)$ 和 W 线性同构.

证明. 由上述定理直接可得. □

推论 3.5 设 V_1, V_2 是 V 的子空间. 则 $V_2/(V_1 \cap V_2)$ 和 $(V_1 + V_2)/V_1$ 线性同构.

证明. 设 $\phi : V_2 \to V_1 + V_2$ 是嵌入, $\pi : V_1 + V_2 \to (V_1 + V_2)/V_1$ 是自然投射. 则 $\psi = \pi \circ \phi$ 是从 V_2 到 $(V_1 + V_2)/V_1$ 的线性映射. 根据引理 3.2, 任意 $(V_1 + V_2)/V_1$ 中的元素都可以

表示为 $(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+V_1$, 其中 $\mathbf{v}_1 \in V_1, \mathbf{v}_2 \in V_2$. 注意到 $(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+V_1=\mathbf{v}_2+V_1$. 于是, 任何 $(V_1+V_2)/V_1$ 中的元素都可以表示为 $\mathbf{v}_2+V_1$. 我们推导:

$$\psi(\mathbf{v}_2)=\pi\circ\phi(\mathbf{v}_2)=\pi(\mathbf{v}_2)=\mathbf{v}_2+V_1.$$

于是 ψ 是满射. 若 $\mathbf{v}_2 \in V_1\cap V_2$, 则 $\mathbf{v}_2+V_1=V_1$. 由此可知, $V_1\cap V_2\subset\ker(\psi)$. 反之, 设 $\mathbf{v}_2\in\ker(\psi)$. 则 $\psi(\mathbf{v}_2)=\mathbf{v}_2+V_1=V_1$. 于是, $\mathbf{v}_2\in V_1\cap V_2$. 从而 $\ker(\psi)=V_1\cap V_2$. 由推论 3.4, 这两个商空间线性同构. $\square$

上述证明可以用下列交换图简洁地表示.

$$\begin{tikzcd}
V_2 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_{\ker(\psi)}"'] \arrow[dr, "\psi"] & V_1+V_2 \arrow[d, "\pi"] \\
V_2/\ker(\psi) \arrow[r, "\bar{\psi}"'] & (V_1+V_2)/V_1
\end{tikzcd} \quad \text{且} \quad \ker(\psi)=V_1\cap V_2.$$

推论 3.6 设 V_1, V_2 是 V 的子空间, 且 V_1+V_2 是直和. 则 $(V_1+V_2)/V_1$ 和 V_2 线性同构.

证明. 由推论 3.5, $(V_1+V_2)/V_1$ 与 $V_2/\{\mathbf{0}\}$ 线性同构. 设 $\phi: V_2\longrightarrow V_2$ 是恒同映射. 由推论 3.4, V_2 与 $V_2/\{\mathbf{0}\}$ 线性同构. 由此可知, $(V_1+V_2)/V_1$ 与 V_2 线性同构. $\square$

4 基底与维数

在本节中 V 是域 F 上有限生成的线性空间. 由线性组合引理可知, 如果 V 可由 k 个向量生成, 则 V 中任何 $k+1$ 个向量一定线性相关.

4.1 极大线性无关集

定义 4.1 设 $S \subset V$ 是非空集. 设 $M \subset S$ 是线性无关集. 如果对任意 $\mathbf{v} \in S$, $\mathbf{v} \in \langle M \rangle$, 即 $S \subset \langle M \rangle$, 则称 M 是 S 中的一个极大线性无关集.

例 4.2 设 $S = \{x, x^3, 2x^3 + x\} \subset \mathbb{Q}[x]$. 求 S 中所有的极大线性无关组.

解. 注意到次数两两不同的多项式组成的集合是线性无关的. 子集 $S_1 = \{x, x^3\}$ 是线性无关组. 这是因为 $2x^3 + x = 2x^3 + x$. 子集 $S_2 = \{x, 2x^3 + x\}$ 是极大线性无关组. 这是因为 $x^3 = (1/2)(2x^3 + x) - (1/2)x$. 而 $S_3 = \{2x^3 + x, x^3\}$ 也是极大线性无关组. 这是因为 $\alpha(2x^3 + x) + \beta x^3 = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ 蕴含着 $\alpha = 0$, 从而 $\beta = 0$. 故 S_3 是线性无关集. 再注意到 $x = (2x^3 + x) - 2x^3$ 即可.

命题 4.3 设 $S \subset V$ 是非空集. 设 $T \subset S$ 是线性无关集. 再设 $V = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$. 则下述断言成立.

(i) *(可扩充)* S 中有极大线性无关集 M 包含 T, 且

$$\mathrm{card}(M) \le k.$$

(ii) *(等势)* 设 M 和 N 是 S 中两个极大线性无关集. 则 $\mathrm{card}(M) = \mathrm{card}(N)$.

(iii) *(表示唯一)* 设 $M = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\} \subset S$. 则 M 是 S 中的极大线性无关集当且仅当对任意的 $\mathbf{v} \in S$, 存在唯一的 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in F$ 使得 $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_s \mathbf{w}_s$.

证明. (i) 和 (ii) 见上学期第二章第二讲命题 2.4. (iii) 是上学期第一章第五讲命题 1.12 (iv) 的直接推论. □

4.2 基底和维数

定义 4.4 线性空间 V 的极大线性无关组称为 V 一组基.

设 B 是 V 的极大线性无关组. 则 V 的维数定义为 $\mathrm{card}(B)$. 如果 $V = \{\mathbf{0}\}$, 其维数定义为 0. 线性空间 V 的维数记为 $\dim_F(V)$ 或 $\dim(V)$.

根据命题 4.3, 线性空间的维数是良定义的.

例 4.5 *(坐标空间)* F^n 的标准基

$$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \mathbf{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}.$$

于是 $\dim(F^n)=n$.

例 4.6 *(矩阵空间)* 设 $E_{i,j}\in F^{m\times n}$, 其中在 i 行 j 列处的元素是 1, 而其它处的元素是 0, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2\ldots,n$. 则 $\{E_{i,j}\,|\,i\in\{1,2,\ldots,m\},\,j\in\{1,2\ldots,n\}\}$ 是 $F^{m\times n}$ 的一组基. 于是 $\dim F^{m\times n}=mn$. 下面我们证明 $\mathrm{SM}_n(F)$ 的一组基是

$$S=\{E_{i,i}\,|\,i=1,2,\ldots,n\}\cup\{E_{i,j}+E_{j,i}\,|\,i,j\in\{1,2,\ldots,n\},\,i\neq j\}.$$

证明. 可直接验证 $S\subset\mathrm{SM}_n(F)$. 设 $A=(a_{i,j})\in\mathrm{SM}_n(F)$. 则 $a_{i,j}=a_{j,i}$. 于是

$$A=\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}E_{i,i}+\sum_{1\le i<j\le n}a_{i,j}(E_{i,j}+E_{j,i}).$$

如果

$$\sum_{i=1}^{n}b_{i,i}E_{i,i}+\sum_{1\le i<j\le n}b_{i,j}(E_{i,j}+E_{j,i})=O,$$

其中 $b_{i,i}, b_{i,j} \in F$. 可直接验证所有的 $b_{i,i} = 0$, $b_{i,j} = 0$. 于是 S 是 $\mathrm{SM}_n(F)$ 的一组基. □

从而 $\dim(\mathrm{SM}_n(F)) = 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

例 4.7 *(代数空间)* 设 $d \in \mathbb{Z}^+$ 和

$$F[x]^{(d)} = \{f \in F[x] | \deg(f) < d\}$$

. 则 $F[x]^{(d)}$ 的一组基是 $\{1, x, \ldots, x^{d-1}\}$, 其维数是 d. 此外, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. 这是因为

$$\mathbb{C} = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

定理 4.8 *(基扩充定理)* 设 V 是有限维线性空间. 如果 $S \subset V$ 是线性无关集, 则存在 V 的基底 T 使得 $S \subset T$.

证明. 因为 V 是有限维的, 所以它是有限生成的. 由基底的定义和命题 4.3 直接推出定理. □

定理 4.9 *(线性映射基本定理 II)* 设 V 的一组基是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, W 是 F 上的线性空间且 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in W$. 则存在唯一的线性映射 $\phi : V \longrightarrow W$ 使得

$$\phi(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \ldots, \phi(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n.$$

证明. 见上学期第二章第三讲定理 5.14 的证明. □

定理 4.10 设 V, W 是 F 上的有限维线性空间. 则 V 和 W 线性同构当且仅当 $\dim(V) = \dim(W)$. 特别地, 当 $\dim_F(V) = n$ 时, V 和 F^n 线性同构.

证明. 设 $\dim(V) = \dim(W) = n$. 令 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 和 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ 分别是 V 和 W 的基底. 由定理 4.9 存在线性映射 $\phi : V \longrightarrow W$ 和 $\psi : W \longrightarrow V$ 使得 $\phi(\mathbf{v}_i) = (\mathbf{w}_i)$ 和 $\psi(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 于是, $\psi \circ \phi(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 由定理 4.9 的唯一性可知 $\psi \circ \phi$ 是 V 上的恒同映射. 同理, $\phi \circ \psi$ 是 W 上的恒同映射. 于是, ϕ 是线性同构.

反之, 设 V 的一组基是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, $\phi : V \longrightarrow W$ 是线性同构. 若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得

$$\alpha_1\phi(\mathbf{v}_1)+\cdots+\alpha_n\phi(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W \implies \phi(\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W.$$

因为 ϕ 是单射, 所以 $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V$. 于是,

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 \implies \phi(\mathbf{v}_1), \ldots \phi(\mathbf{v}_n) \text{ 线性无关.}$$

由定理 4.8 可知, $\dim(W) \geq \dim(V)$. 同理 $\dim(V) \geq \dim(W)$. 于是, $\dim(V) = \dim(W)$. □

4.3 若干维数公式

引理 4.11 设 U 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U). \tag{4}$$

证明. 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 是 U 的一组基. 由定理 4.8 可知，存在 $\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ 使得 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基. 下面我们来证明 $\mathbf{v}_{k+1} + U, \ldots, \mathbf{v}_n + U$ 是 V/U 的一组基. 首先, 设 $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得

$$\alpha_{k+1}(\mathbf{v}_{k+1} + U) + \cdots + \alpha_n(\mathbf{v}_n + U) = U.$$

则 $(\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots \alpha_n\mathbf{v}_n) + U = U$. 即 $(\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots \alpha_n\mathbf{v}_n) \in U$. 换言之, 存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$ 使得

$$\begin{aligned}
&\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n \\
&= \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k \\
&\Longrightarrow \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k + (-\alpha_{k+1})\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + (-\alpha_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

因为 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 线性无关, 所以

$$\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0.$$

于是, $\mathbf{v}_{k+1} + U, \ldots, \mathbf{v}_n + U$ 线性无关. 再设 $\mathbf{v} + U \in V/U$, 其中 $\mathbf{v} \in V$. 则存在 $\beta_1, \ldots, \beta_n \in V$ 使得

$$\mathbf{v} = \underbrace{\beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_k\mathbf{v}_k}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\beta_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + \beta_n\mathbf{v}_n}_{\mathbf{y}}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}+U &= \mathbf{x}+\mathbf{y}+U \\
&= (\mathbf{x}+U)+(\mathbf{y}+U) && \text{(商空间中的运算)} \\
&= U+(\mathbf{y}+U) && (\mathbf{x}\in U) \\
&= \mathbf{y}+U && (U\ \text{是}\ V/U\ \text{中的零}) \\
&= \beta_{k+1}(\mathbf{v}_{k+1}+U)+\cdots+\beta_n(\mathbf{v}_n+U). && \text{(商空间中的运算)}
\end{aligned}$$

由此可知, $\mathbf{v}_{k+1}+U,\ldots,\mathbf{v}_n+U$ 是 V/U 的一组基. 从而 $\dim(V/U)=n-k$. □

命题 4.12 *(i)* 设 U 是 V 的子空间, 则 $U\neq V$ 当且仅当 $\dim(U)<\dim(V)$.

(ii) 设 V_1,V_2 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2).$$

(iii) 设 $\phi: V\longrightarrow W$ 是线性映射. 则

$$\dim(\ker(\phi))+\dim(\mathrm{im}(\phi))=\dim(V).$$

证明. (i) (方法1) 见上学期第二章第二讲命题 2.13.

(方法2)

$$\dim(U)<\dim(V) \overset{(4)}{\iff} \dim(V/U)>0 \iff V/U\neq\{U\} \iff U\subsetneq V.$$

(ii) (方法1) 见上学期第二章第二讲命题 2.14.

(方法2) 由上周讲义推论 3.7 和 定理 4.10,

$$\dim((V_1+V_2)/V_1) = \dim(V_2/(V_1\cap V_2))$$
$$\stackrel{(4)}{\Longrightarrow} \dim(V_1+V_2) - \dim(V_1) = \dim(V_2) - \dim(V_1\cap V_2).$$

(iii) (方法1) 见上学期第二章第三讲定理 5.14.

(方法2) 由线性映射基本定理I和定理 4.10,

$$\dim(V/\ker(\phi)) = \dim(\operatorname{im}(\phi)) \stackrel{(4)}{\Longrightarrow} \dim(V) - \dim(\ker(\phi)) = \dim(\operatorname{im}(\phi)).$$

命题 4.13 设 $V_1,\ldots,V_k$ 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V_1+\cdots+V_k) \le \dim(V_1)+\cdots+\dim(V_k).$$

等号成立当且仅当 $V_1+\cdots+V_k$ 是直和.

证明. 我们对 k 归纳证明不等式. 当 $k=1$ 时不等式显然成立. 设 $k>1$ 且不等式对 $k-1$ 成立. 则

$$\begin{aligned}
&\dim(V_1+V_2+\cdots+V_k)\\
&= \dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\
&- \dim(V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)) \quad (\text{命题 } 4.12 \text{ (ii)})\\
&\le \dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\
&\le \dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_k). \quad (\text{归纳假设})
\end{aligned}$$

设 $V_1+\cdots+V_k$ 是直和. 对 k 归纳. 当 $k=1$ 时显然. 设 $k>1$ 且 $k-1$ 时结论成立.

$$\begin{aligned}
&\dim(V_1+V_2+\cdots+V_k)\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\
&\quad-\dim(V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)) &&(\text{命题 } 4.12\ (\mathrm{ii}))\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k) &&(\text{定理 } 1.12\ (\mathrm{iii}))\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_k). &&(\text{归纳假设})
\end{aligned}$$

反之, 设 $\dim(V_1+\cdots+V_k)=\dim(V_1)+\cdots+\dim(V_k)$. 我们要证明 $V_1+\cdots+V_k$ 是直和. 假设不是直和. 由定理 1.12 (iii), 存在 $i\in\{1,\ldots,k\}$ 使得

$$V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_n)\neq\{\mathbf{0}\}.$$

不妨设 $i=1$. 则

$$\begin{aligned}
&\dim(V_1+V_2+\cdots+V_k)\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\
&-\dim(V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)) \quad (\because \text{命题 } 4.12\ (\mathrm{ii}))\\
&<\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k) \quad (\because V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)\neq\{\mathbf{0}\})\\
&\leq\dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_k). \quad (\because \text{刚证的不等式})
\end{aligned}$$

矛盾. □