

第一章 空间与形式

4.4 利用线性映射的核证明矩阵秩的不等式

核方法基本步骤如下:

1. 把矩阵解释为坐标空间的线性映射.

基本符号: 设 $A \in F^{m \times n}$. 记 $r_A = \text{rank}(A)$.

$$\begin{aligned}\phi_A: F^n &\longrightarrow F^m \\ \mathbf{x} &\longmapsto A\mathbf{x}.\end{aligned}$$

记 $K_A = \ker(\phi_A)$ 和 $d_A = \dim(K_A)$. 由对偶定理可知,

2. 利用对偶定理 $d_A + r_A = n$ 把秩转换为核的维数;
3. 利用核空间的“包含”关系和线性映射基本定理 (I), 构造线性单射;
4. 利用线性单射保持原像空间的维数证明不等式.

例 4.14 设 $A \in F^{m \times s}$ 和 $B \in F^{s \times n}$. 证明:

$$\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - s.$$

证明. 由矩阵乘法定义可知: $\phi_{AB} = \phi_A \circ \phi_B$. 要证明的不等式等价于

$$n - d_{AB} \geq s - d_A + n - d_B - s \iff d_A + d_B \geq d_{AB}.$$

注意到 $K_B \subset K_{AB} \subset F^n$. 定义:

$$\begin{aligned}\rho: K_{AB} &\longrightarrow K_A \\ \mathbf{x} &\longmapsto B\mathbf{x}.\end{aligned}$$

注意到 $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}_m$ 蕴含 $B\mathbf{x} \in K_A$. 故上述线性映射是良定义的. 显然 $K_B = \ker(\rho)$. 根据线性映射基本定理 I, K_{AB}/K_B 线性同构 $\text{im}(\rho)$ 和 $\text{im}(\rho) \subset K_A$. 于是,

$$\dim(K_{AB}/K_B) = \dim(\text{im}(\rho)) \leq d_A.$$

由上一讲引理 4.11, $d_{AB} - d_B \leq d_A \implies d_{AB} \leq d_A + d_B$. \square

例 4.15 设 $A, B \in M_n(F)$ 且 $AB = BA$. 证明:

$$\text{rank}(A + B) + \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

证明. 由矩阵运算可知 $\phi_A \circ \phi_B = \phi_{AB}$ 且 $\phi_A + \phi_B = \phi_{A+B}$. 要证明的不等式等价于

$$n - d_{A+B} + n - d_{AB} \leq n - d_A + n - d_B \iff d_A + d_B \leq d_{A+B} + d_{AB}.$$

由上例的推理可知: $K_B \subset K_{AB}$. 因为 $AB = BA$, 所以 $K_{AB} = K_{BA}$. 故 $K_A \subset K_{AB}$. 于是

$$K_A + K_B \subset K_{AB} \implies \dim(K_A + K_B) \leq d_{AB}.$$

再根据维数公式

$$d_A + d_B - \dim(K_A \cap K_B) \leq d_{AB} \implies d_A + d_B \leq d_{AB} + \dim(K_A \cap K_B).$$

于是, 只要证明 $\dim(K_A \cap K_B) \leq d_{A+B}$. 可直接验证

$$K_A \cap K_B \subset K_{A+B}.$$

故最后一个不等式显然成立. \square

矩阵法. 设

$$M = \begin{pmatrix} A & O & O \\ O & B & O \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{\text{右乘} \begin{pmatrix} E & O & B \\ O & E & O \\ O & O & E \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A & O & AB \\ O & B & O \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{右乘} \begin{pmatrix} E & O & O \\ E & E & O \\ O & O & E \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A & O & AB \\ B & B & O \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{左乘} \begin{pmatrix} E & O \\ E & E \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A & O & AB \\ A+B & B & AB \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{右乘} \begin{pmatrix} E & O & O \\ O & E & -A \\ O & O & E \end{pmatrix} \text{ 并利用 } AB=BA} \begin{pmatrix} A & O & AB \\ A+B & B & O \end{pmatrix} =: N \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \text{rank}(A) + \text{rank}(B) &= \text{rank}(M) = \text{rank}(N) \\ &\geq \text{rank}(A+B) + \text{rank}(AB). \quad \square \end{aligned}$$

5 坐标变换

在本节中 V 是域 F 上的 n 维线性空间.

定义 5.1 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基. 对任意的 $\mathbf{x} \in V$, 存在唯一的 $x_1, \dots, x_n \in F$ 使得

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

称 $(x_1, \dots, x_n)^t$ 是 \mathbf{x} 在基底 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 的坐标.

坐标的存在唯一性由 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 的线性无关性可得.

例 5.2 在 \mathbb{Q}^3 中: 设

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) 证明: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是 $V := \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ 的一组基.

(ii) 令 $\mathbf{w} = (3, 2, 2)^t$, 判断 \mathbf{w} 是否在 V 中. 如果在计算 \mathbf{w} (做为 V 中的向量) 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 的下的坐标.

解. (i) 设 $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. 则

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\text{rank}(A) = 2$, 所以 $\dim(V) = 2$. 因为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 线性无关, 所以 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是 V 的一组基.

(ii) 设 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$ 使得 $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2$. 则

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ 2\alpha_2 = 2 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases} \implies \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2.$$

故 $\mathbf{w} \in V$ 且它在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的坐标是 $(1, 2)$. 换言之,

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

定理 5.3 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n \in V$. 则 $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ 是 V 的一组基当且仅当存在唯一的 $P \in \text{GL}_n(F)$ 使得

$$(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)P. \quad (1)$$

(称 P 是从基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 到基底 $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ 的转换矩阵).

证明. 设 $P \in \text{GL}_n(F)$ 使得 (1) 成立. 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ 使得

$$\alpha_1 \mathbf{e}'_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}'_n = \mathbf{0}.$$

则

$$(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 线性无关, 所以

$$P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因为 P 满秩, 所以 $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. 于是 $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ 线性无关. 因为 $\dim(V) = n$, 所以 $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ 是 V 的一组基.

反之, 设 $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ 是 V 的一组基. 因为 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, 所以存在 $P \in M_n(F)$ 使得 (1) 成立. 我们首先证明 P 可逆. 否则, P 不满秩, 从而存在 $\beta_1, \dots, \beta_n \in F$, 不全为零, 使得

$$P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由 (1),

$$\beta_1 \mathbf{e}'_1 + \dots + \beta_n \mathbf{e}'_n = \mathbf{0},$$

即 $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ 线性相关. 矛盾. 于是 $P \in GL_n(F)$. 再设 $Q \in GL_n(F)$ 使得

$$(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)Q.$$

则 $(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)(P - Q)$. 由 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 的线性无关性可知 $P - Q = O$, 即 $P = Q$. 唯一性成立. \square

定理 5.4 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ 是 V 的两组基, P 从第一组基到第二组的转换矩阵. 设 $\mathbf{x} \in V$ 在这两组基下的坐标分别是 $(x_1, \dots, x_n)^t$ 和 $(x'_1, \dots, x'_n)^t$. 则

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

证明. 我们计算

$$\mathbf{x} = (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

由坐标的唯一性可知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 5.5 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是 \mathbb{R}^2 的标准基. 证明

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

也是一组基. 设 $\mathbf{x} = (5, 1)^t$. 求 \mathbf{x} 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的坐标.

证明. 通过矩阵表示, 我们有

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_P.$$

因为 A 可逆, 所以由定理 5.3 可知, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是基. 计算得

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

再根据定理 5.4, \mathbf{x} 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的坐标是

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

例 5.6 判断 $p_1 = x(x-1), p_2 = x(x-2), p_3 = x(x-2) + 1$ 在 $F[x]^{(3)}$ 中是不是一组基.

解. 因为 $p_1 = x^2 - x, p_2 = x^2 - 2x, p_3 = x^2 - 2x + 1$, 所以

$$(p_1, p_2, p_3) = (1, x, x^2) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_P.$$

因为 $\det(P) = 1 \neq 0$, 所以 A 可逆. 由定理 5.3, p_1, p_2, p_3 是一组基.

6 对偶空间简介

在本节中 V 是域 F 上的 n 维线性空间.

线性空间 $\text{Hom}(V, F)$ 称为 V 的对偶空间, 记为 V^* . 换言之, V^* 是 V 上所有线性函数的集合, 其中的加法和数乘由 $\text{Map}(V, F)$ 给出.

定理 6.1 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 则在 V^* 中存在唯一的一组基 $\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$ 满足 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. 特别地, $\dim(V^*)=n$. ($\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$ 称为 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 的对偶基.)

证明. 对 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 设 $\mathbf{e}_i^* \in V^*$ 满足 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}, j = 1, 2, \dots, n$. 由线性映射基本定理 II 可知这样的 \mathbf{e}_i^* 存在且唯一. 我们只要证明 $\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$ 是 V^* 的基即可.

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ 使得 $\alpha_1 \mathbf{e}_1^* + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n^* = \mathbf{0}^*$, 其中 $\mathbf{0}^*$ 代表 V^* 中的零元, 即零函数. 设 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. 则

$$0 = \mathbf{0}^*(\mathbf{e}_j) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i^* \right) (\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j.$$

于是 $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, 即 $\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$ 线性无关.

再设 $f \in V^*$ 且 $f(\mathbf{e}_j) = \beta_j, j = 1, 2, \dots, n$. 令

$$g = \beta_1 \mathbf{e}_1^* + \dots + \beta_n \mathbf{e}_n^*.$$

则对于任意 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 我们有

$$g(\mathbf{e}_j) = \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{e}_i^* \right) (\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n \beta_i \delta_{i,j} = \beta_j.$$

再由线性映射基本定理 II 中的唯一性可知, $f = g$. \square

例 6.2 对偶基为取坐标提供方便. 设 $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$.

证明: 对任意 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_i = \mathbf{e}_i^*(\mathbf{x})$.

证明. 我们计算

$$\mathbf{e}_i^*(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i^* \left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n x_j \delta_{i,j} = x_i. \quad \square$$

由此我们可以得出 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{x}) = 0$ 对任意 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 成立.

引理 6.3 设 f_1, \dots, f_n 是 V^* 的一组基, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 则 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 当且仅当 $f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{y}), i = 1, 2, \dots, n$.

证明. 设 $\mathbf{z} \in V$. 只要证明:

$$\mathbf{z} = \mathbf{0} \iff f_1(\mathbf{z}) = \dots = f_n(\mathbf{z}) = 0.$$

“ \implies ”是显然的.

“ \impliedby ”. 假设 $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. 由线性映射基本定理 II 可知, 存在 $f \in V^*$ 使得 $f(\mathbf{z}) = 1$. 因为 f_1, \dots, f_n 是 V^* 的基底, 所以存在 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ 使得 $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$. 于是, $f(\mathbf{z}) = (\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i)(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(\mathbf{z}) = 0$. 矛盾. \square

定理 6.4 下列映射

$$\begin{aligned} \phi: V &\longrightarrow V^{**} \\ \mathbf{v} &\longmapsto \epsilon_{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

是线性同构, 其中

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mathbf{v}}: V^* &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

证明. 先验证 $\epsilon_{\mathbf{v}} \in V^{**}$. 设 $\alpha, \beta \in F, f, g \in V^*$. 则

$$\epsilon_{\mathbf{v}}(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}) + \beta g(\mathbf{v}) = \alpha \epsilon_{\mathbf{v}}(f) + \beta \epsilon_{\mathbf{v}}(g).$$

验证完毕. 于是 ϕ 是良定义的.

再验证 ϕ 是线性的. 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \alpha, \beta \in F$. 则对任意的 $f \in V^*$,

$$\epsilon_{\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}}(f) = f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}) = \alpha \epsilon_{\mathbf{u}}(f) + \beta \epsilon_{\mathbf{v}}(f).$$

于是 $\epsilon_{\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}} = \alpha \epsilon_{\mathbf{u}} + \beta \epsilon_{\mathbf{v}}$, 即 $\phi(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha \phi(\mathbf{u}) + \beta \phi(\mathbf{v})$.

最后, 我们验证 ϕ 是双射. 由定理 6.1 可知, $\dim(V^{**}) = n$. 因为 $\text{im}(\phi) \subset V^{**}$ 且 $\dim(\ker(\phi)) + \dim(\text{im}(\phi)) = n$. 我们只要验证 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}\}$ 即可. 设 $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}^{**}$, 其中 $\mathbf{0}^{**}$ 代表 V^{**} 中的零元. 则对任意的 $f \in V^*$, $f(\mathbf{v}) = 0$. 由引理 6.3 可知, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. \square

上述定理中的线性同构 ϕ 的定义与基底无关, 此时我们说 V 与 V^{**} 自然同构.

7 双线性型

本节中 V 是 F 上的 n 维线性空间, $n > 0$.

7.1 定义和矩阵表示

设

$$\begin{aligned} f: V \times V &\longrightarrow F \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longmapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

如果对任意的 $\alpha, \beta \in F$ 和 $\mathbf{z} \in V$ 满足

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

和

$$f(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{x}, \mathbf{z}),$$

则称 f 是 V 上的双线性型.

例 7.1 设 f 是 V 上的双线性型. 则对任意的 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ 和 $\alpha, \beta \in F$, 我们有:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) &= f(\mathbf{u}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

且

$$f(\alpha\mathbf{x}, \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}, \beta\mathbf{y}) = \alpha\beta f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

此外

$$f(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{0}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{0}, \mathbf{y}) \implies f(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = 0.$$

同理, $f(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0$.

定理 7.2 设 V 的一组基是 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, f 是 V 上的双线性型. 则存在唯一的矩阵 $A \in M_n(F)$ 使得,

$$\forall \mathbf{x} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

我们有

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

事实上, $A = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{n \times n}$. 称 A 是 f 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵表示.

证明. 我们计算

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i f\left(\mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n y_j f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) x_i y_j. \end{aligned}$$

令 $A = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{n \times n}$. 由上式直接验证得

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

再设 $B = (b_{i,j}) \in M_n(F)$ 使得

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

对 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 取 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i, \mathbf{y} = \mathbf{e}_j$, 则

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \left(0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, \dots, 0 \right) B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow j = \vec{B}_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow j = b_{i,j}.$$

于是 $A = B$. \square

例 7.3 设 $V = \mathbb{R}^2$. 对任意的

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

验证 f 是 V 上的双线性型, 并求它在标准基下的矩阵.

解. 设 $\alpha, \beta \in F, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$,

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z}, \mathbf{y}) &= \det(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \det(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \det(\beta\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ &= \alpha \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta \det(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{z}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

类似 f 对第二个变元线性. 于是 f 是双线性型.

注意到 $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0$, $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$ 而 $f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = -1$. 于是

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

例 7.4 设 $A \in M_n(F)$. 则

$$\begin{aligned} f : F^n \times F^n &\longrightarrow F \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) &\mapsto (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

是 F^n 上的双线性型, f 在标准基下的矩阵是 A .

证明. 设 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^t, \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^t$, $\alpha, \beta \in F$. 则

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z}, \mathbf{y}) &= (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z})^t A \mathbf{y} \\ &= \alpha(\mathbf{x}^t A \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{z}^t A \mathbf{y}) \\ &= \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{z}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

于是, f 对第一个变元线性. 类似可验证 f 对第二个变元也线性. 从而 f 是双线性型. 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 F^n 的标准基, $A = (a_{i,j})_{n \times n}$. 则 $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = a_{i,j}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. 由定理 7.2, f 在标准基下的矩阵是 A . \square

设 f 是 V 上的双线性型, f 在 V 的两组基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 下的矩阵分别是 A 和 B . 再设

$$(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)P, \quad P \in \text{GL}_n(F).$$

设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = u_1\epsilon_1 + \dots + u_n\epsilon_n$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \dots + y_n\mathbf{e}_n = v_1\epsilon_1 + \dots + v_n\epsilon_n$. 则由坐标变换公式可得

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (x_1, \dots, x_n)A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= (u_1, \dots, u_n) \underbrace{P^t A P}_B \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

根据定理 7.2, $B = P^t A P$. 反之, 给定 F^n 的一组基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $P \in \text{GL}_n(F)$, f 在给定基底下的矩阵是 A , 则 $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)P$ 是 F^n 的一组基. 由上述计算可知 f 在新的基底下的矩阵是 $P^t A P$.

反推上述过程可知, 如果双线性型 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 在基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵是 A , 且 $B = P^t A P$, 其中 $P \in \text{GL}_n(F)$.

则 B 是该双线性型在基底 $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ 下的矩阵.

定义 7.5 设 $A, B \in M_n(F)$. 如果存在 $P \in GL_n(F)$ 使得 $B = P^t A P$, 则称 B 合同于 A , 记为 $B \sim_c A$.

我们来验证 \sim_c 是等价关系. 对任意 $A \in M_n(F)$, $A = E^t A E \implies A \sim_c A$. 自反性成立. 设 $B \sim_c A$. 则存在 $P \in GL_n(F)$ 使得 $B = P^t A P$. 于是

$$A = (P^t)^{-1} B P^{-1} = (P^{-1})^t B P^{-1} \implies A \sim_c B.$$

对称性成立. 设 $A \sim_c B, B \sim_c C$. 则存在 $P, Q \in GL_n(F)$ 使得

$$\begin{aligned} A &= P^t B P, B = Q^t C Q \\ \implies A &= P^t Q^t C Q P = (QP)^t C (QP) \\ \implies A &\sim_c C. \end{aligned}$$

传递性成立.

从以上论述我们看出, 一个双线性型在不同基底下的矩阵是合同的. 而两个彼此合同的矩阵一定是一个双线性型在不同基底下的矩阵. 于是, 研究双线性型等价于研究方阵在合同意义下的等价类. 利用矩阵的语言, 我们所要研究的问题是: $M_n(F)/\sim_c$ 含有多少不同的等价类? 在每个等价类中可否找出一个“标准”的代表元? 这个代表矩阵中应该含有尽可能多个 0, 而非零元素出现的位置应该尽可能有规律.

命题 7.6 设 $A, B \in M_n(F)$. 若 $A \sim_c B$, 则 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

证明. 设 $P \in GL_n(F)$ 使得 $A = P^t B P$. 因为 P 满秩, 所以 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$. (见上学期讲义第二章推论 4.3) \square .

定义 7.7 设 f 是 V 上的双线性型, A 是 f 在 V 的某组基下的矩阵. 则 f 的秩定义为 $\text{rank}(A)$, 记为 $\text{rank}(f)$.

由上述命题可知, $\text{rank}(f)$ 是良定义的. 下例说明双线性型可以通过矩阵给出.

例 7.8 合同关系保持对称和斜对称性. 设 $A \in M_n(F)$ (斜)对称, 且 $A \sim_c B$. 证明 B 也(斜)对称.

证明. 设 A 斜对称. 因为 $A \sim_c B$, 所以存在 $P \in GL_n(F)$ 使得 $B = P^t A P$. 则

$$B^t = (P^t A P)^t = P^t A^t P = -P^t A P = -B.$$

对称情形类似. \square