

第一章 空间与形式

7.2 对称双线性型

定义 7.11 设 f 是 V 上的双线性型. 如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, 则称 f 是对称双线性型.

命题 7.12 设 f 是 V 上的双线性型, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, A 是 f 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 则 f 是对称的当且仅当 A 是对称的.

证明. 设 f 对称. 则对任意 $i, j \in \{1, \dots, n\}$, 我们有 $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = f(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$. 故 $A = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{n \times n}$ 对称. 反之, 设 A 对称, \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的坐标分别是 $(x_1, \dots, x_n)^t$ 和 $(y_1, \dots, y_n)^t$. 则

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (x_1, \dots, x_n)A(y_1, \dots, y_n)^t \\ &= (y_1, \dots, y_n)A^t(x_1, \dots, x_n)^t \quad (\because F \text{ 中的元素转置不变}) \\ &= (y_1, \dots, y_n)A(x_1, \dots, x_n)^t = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (\because A^t = A) \end{aligned}$$

故 f 对称. \square

空间 V 上的所有对称双线性型记为 $\mathcal{L}_2^+(V)$. 本节的主要结果是

定理 7.13 设 F 的特征不等于 2 且 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$. 则 V 中有一组基使得 f 在该基下的矩阵是对角阵.

证明该定理需要对称双线性型的极化公式. 设 F 的特征不等于 2 且 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$. 则对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y})). \quad (1)$$

验证如下:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y})) \\ &= \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y})) \quad (\text{双线性}) \\ &= \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x})) \\ &= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (\text{对称性}) \end{aligned}$$

定理 7.13 的证明. 如果 f 是零映射, 则 f 在 V 的任意基底下的矩阵都是零矩阵. 定理显然成立. 设 f 不是零映射. 再设 $n = \dim(V)$. 我们对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, 定理显然成立. 设 $n > 1$ 且定理对 $n - 1$ 成立.

由极化公式 (1), 存在 $\mathbf{e}_1 \in V$ 使得 $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \neq 0$. 令 $W = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}, \mathbf{e}_1) = 0\}$. 可直接验证 W 是子空间. 我们来证明

$$V = \langle \mathbf{e}_1 \rangle \oplus W. \quad (2)$$

首先, 设 $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{e}_1 \rangle \cap W$. 则 $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{e}_1$, 其中 $\lambda \in F$, 且 $f(\lambda \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 0$. 于是 $\lambda f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 0$. 因为 $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \neq 0$, 所以 $\lambda = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由第一章第一讲定理 1.12 (iii), $\langle \mathbf{e}_1 \rangle + W$ 是直和. 由第一章第二讲命题 4.15, 只要证明

$\dim(W) = n - 1$ 即可. 考虑线性映射

$$\begin{aligned}\phi: V &\longrightarrow F \\ \mathbf{x} &\mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1).\end{aligned}$$

则 $W = \ker(\phi)$. 因为 $\phi(\mathbf{e}_1) \neq 0$, 所以 $\dim(\operatorname{im}(\phi)) \geq 1$. 但 $\operatorname{im}(\phi) \subset F$ 且 $\dim F = 1$. 于是 $\operatorname{im}(\phi) = F$. 特别地 $\dim(\operatorname{im}(\phi)) = 1$. 由对偶公式, $\dim(W) = n - 1$. 直和分解 (2) 成立.

设 $g \in \mathcal{L}_2(W)$ 满足对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$, $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. 由归纳假设存在 W 的一组基 $\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 使得 g 在该基下的矩阵是对角的, 即对任意的 $i, j \in \{2, 3, \dots, n\}, i \neq j$, 我们有 $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$. 由 (2), $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 线性无关 (见第一章第一讲定理 1.12 (ii)) 且 $\dim(V) = n$. 于是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 由 W 的定义可知

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

在由 f 的对称性可知

$$f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

综上所述 $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 且 $i \neq j$. 于是 f 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵是对角阵. \square

定义 7.14 设 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$, f 在 V 的基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵是对角阵. 则称 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 f 的一组规范基. 设双线

性型 f 在一组规范基下的矩阵为 $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. 则

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda_1 x_1 y_1 + \dots + \lambda_n x_n y_n$$

称为与规范基对应的规范型, 其中 $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$,
 $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}_1 + \dots + y_n \mathbf{e}_n$.

推论 7.15 设 F 的特征不等于 2, $A \in \text{SM}_n(F)$. 则 A 合同于一个对角阵.

证明. 考虑双线性型

$$f: F^n \times F^n \longrightarrow F$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

因为 A 对称, 所以 f 对称. 由上述定理存在 F^n 的一组基使得 f 在该基下的矩阵是对角阵 B . 则 $A \sim_c B$. \square

例 7.16 求 $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ 使得

$$P^t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_A P$$

是对角矩阵.

解. 设 f 是 \mathbb{R}^3 上对称双线性型, 它在标准基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 下的矩阵是 A .

步骤 1. 选取 ϵ_1 使得 $f(\epsilon_1, \epsilon_1) \neq 0$. 令 $\epsilon_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. 则

$$\begin{aligned} f(\epsilon_1, \epsilon_1) &= f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ &= f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 2. \end{aligned}$$

步骤 2. 确定 $W = \ker(f(\mathbf{x}, \epsilon_1))$ 的一组基. 我们计算

$$f(\mathbf{x}, \epsilon_1) = (x_1, x_2, x_3)A(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = x_1 + x_2 + 2x_3.$$

解方程 $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ 得到 W 的一组基

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

步骤 3. 求 $g := f|_{W \times W}$ 在 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 下的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) & f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \\ f(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1) & f(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

到此降维到 W 上的对称双线性型 g .

步骤 1. 选取 ϵ_2 使得 $g(\epsilon_2, \epsilon_2) \neq 0$. 令 $\epsilon_2 = \mathbf{w}_1$.

步骤 2. 确定 $Z = \ker(g(\mathbf{x}, \epsilon_2))$ 的一组基. 我们计算

$$g(\mathbf{y}, \epsilon_2) = (y_1, y_2)B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2y_1 - 2y_2.$$

解方程 $-2y_1 - 2y_2 = 0$ 得到解空间的一组基

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies Z \text{ 的基是 } (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

于是, f 在 \mathbb{R}^3 中的一组规范基是

$$\epsilon_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_2 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_3 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

从 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 到 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 的矩阵是

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

计算得

$$P^t A P = \text{diag}(2, -2, -2).$$

例 7.17 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SM}_2(\mathbb{Z}_2).$$

证明 A 不合同于对角方阵.

证明. 设

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$$

使得 $P^tAP = \text{diag}_2(u, v)$. 则

$$P^tAP = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ac & ad + bc \\ ad + bc & 2bd \end{pmatrix} = \text{diag}_2(u, v).$$

于是 $u = v = 0$ ($\because 2 = 0$). 由此可知 $\text{rank}(A) = 0$. 矛盾.

推论 7.18 设 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$ 且 $r = \text{rank}(f)$. 则存在 V 的一组规范基使得 f 在该基下的矩阵是

$$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0),$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in F \setminus \{0\}$.

证明. 由定理 7.13, 存在 f 规范基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. 于是

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ 且 } i \neq j.$$

因为 $r = \text{rank}(A)$, 所以在 $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n)$ 中恰好有 r 个非零. 适当调整下标后, 我们可以得到一组新的规范基 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 满足 $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$,

$$f(\epsilon_i, \epsilon_i) \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad \text{且} \quad f(\epsilon_j, \epsilon_j) = 0, \quad j = r+1, r+2, \dots, n.$$

令 $\lambda_i = f(\epsilon_i, \epsilon_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 即可. \square

推论 7.19 设 $A \in \text{SM}_n(F)$ 且 $\text{rank}(A) = r$. 则存在 F 中非零元素 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ 使得 $A \sim_c \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$.

证明. 由上述推论直接可得. \square

例 7.20 设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{C})$ 且 $r = \text{rank}(A)$. 则

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

证明. 由推论 7.19, $A \sim_c \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ 是非零复数. 由代数学基本定理 $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r}$ 是复数. 令

$$P = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-r} \right).$$

则 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ 且对称. 直接计算

$$\begin{aligned} A &\sim_c P^t \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) P \\ &= P^t \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) P \\ &= \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

注解 7.21 设 $f \in \mathcal{L}_2^+(\mathbb{C}^n)$ 且 $r = \text{rank}(f)$. 则存在 \mathbb{C}^n 的一组基 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 使得对任意 \mathbb{C}^n 中向量 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i$ 和 $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i \epsilon_i$, 我们有

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_r y_r.$$

8 二次型 (quadratic forms)

我们从双线性型的角度引入二次型, 这样可以使我们可以直接应用双线性型的结论. 然后我们说明二次型和二次齐次多项式之间的关系. 在本节中 V 是域 F 上的有限维线性空间, F 的特征不是 2.

8.1 从双线性型到二次型

定义 8.1 设 $q: V \rightarrow F$ 称为 V 上的二次型, 如果

(i) 对于任意的 $\mathbf{v} \in V$, $q(\mathbf{v}) = q(-\mathbf{v})$;

(ii) 对于任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y}))$$

是 V 上的对称双线性型. f 称为 q 的配极.

注解 8.2 设 q 是 V 上的二次型. 则 $q(\mathbf{0}) = 0$. 这是因为在上述定义条件 (ii) 中代入 $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$, 得到

$$0 = f(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = -\frac{1}{2}q(\mathbf{0}) \implies q(\mathbf{0}) = 0.$$

下面的命题说明二次型和配极之间的关系.

命题 8.3 设 $q: V \rightarrow F$. 则 q 是二次型当且仅当存在 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$ 使得 $\forall \mathbf{x} \in V$, $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. 此时, q 的配极是 f .

证明. 设 q 是二次型. 由定义 8.1 中的 (ii) 和 (i) 可知.

$$\begin{aligned} -f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}, -\mathbf{x}) \stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{2}(q(\mathbf{0}) - q(\mathbf{x}) - q(-\mathbf{x})) \\ &= -\frac{1}{2}(q(\mathbf{x}) + q(-\mathbf{x})) \stackrel{(i)}{=} -q(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

于是, $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

反之, 直接计算得 $q(-\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x}, -\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = q(\mathbf{x})$. 由对称双线性型的极化公式定义 8.1 中 (ii) 成立. \square

推论 8.4 设 q 是 V 上的二次型. 则对任意的 $\alpha \in F$ 和 $\mathbf{v} \in V$, $q(\alpha\mathbf{v}) = \alpha^2q(\mathbf{v})$.

证明. 设 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$ 是 q 的配极. 由上述命题 (i),

$$q(\alpha\mathbf{x}) = f(\alpha\mathbf{x}, \alpha\mathbf{x}) = \alpha^2f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \alpha^2q(\mathbf{x}). \quad \square$$

定理 8.5 设 V 的一组基是 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, q 是 V 上的二次型. 则存在唯一的矩阵 $A \in \text{SM}_n(F)$ 使得对于任意的 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ 使得

$$q(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

证明. 设 f 是 q 的配极, A 是 f 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 则 $A \in \text{SM}_n(F)$ 且对任意的 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{y} =$

$y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$, 我们有

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_n)A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{命题 8.3}} q(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

存在性成立.

再设 $B \in \text{SM}_n(F)$ 使得

$$q(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_n)B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

令

$$g: V \times V \longrightarrow F$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

可直接验证 $g \in \mathcal{L}_2^+(V)$. 因为 $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = q(\mathbf{x})$, 所以 g 是 q 的配极 (命题 8.3 (ii)) 且 B 是 g 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 因为 $f = g$, 所以 $A = B$. 唯一性成立. \square

称矩阵 A 是二次型 q 在基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 进而, 配极 f 的秩称为 q 的秩, 记为 $\text{rank}(q)$.

例 8.6 设 $p \in F[x_1, \dots, x_n]$ 齐二次, 多项式函数 $p: F^n \rightarrow F$ 由公式 $p(\mathbf{v}) = p(v_1, \dots, v_n)$ 给出, 其中 $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^t$ 是 F^n 中的任意元素. 则 p 是 F^n 上的二次型.

证明. 因为 p 是齐二次的, 所以 $p = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{i,j} x_i x_j$. 令 $\beta_{i,i} = \alpha_{i,i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\beta_{i,j} = \alpha_{i,j}/2$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 其中 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 且 $i < j$. 而 $\beta_{j,i} = \beta_{i,j}$, 其中 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 且 $i < j$. 则

$$\begin{aligned}
 p &= \sum_{i=1}^n \beta_{i,i} x_i^2 + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \beta_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} x_i x_j \\
 &= (x_1, \dots, x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n,1} & \cdots & \beta_{n,n} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

由 $\beta_{i,j}$ 的定义可知, A 是对称的. 令 f 是在标准基下矩阵是 A 的对称双线性型. 则

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (v_1, \dots, v_n) A (v_1, \dots, v_n)^t = p(\mathbf{v}).$$

于是, p 是 F^n 上的二次型. 它在标准基下的矩阵等于 A . 由 $\beta_{i,j}$ 的定义可知,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \frac{\alpha_{1,2}}{2} & \cdots & \frac{\alpha_{1,n}}{2} \\ \frac{\alpha_{1,2}}{2} & \alpha_{2,2} & \cdots & \frac{\alpha_{2,n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha_{1,n}}{2} & \frac{\alpha_{2,n}}{2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}.$$

例 8.7 设 $p = x_2^2 - x_1 x_2 + 4x_2 x_3$. 求 p 在 \mathbb{R}^3 的标准基下的矩阵和秩.

解. 由上例可知,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

由定义得出 $\text{rank}(p) = \text{rank}(A) = 2$.

例 8.8 设 $p \in F[x_1, \dots, x_n]$, 非零齐二次. 证明: 如果 p 可以分解为两个一次多项式之积, 则 p 作为 F^n 上的二次型的秩小于 3.

证明. 设 $p = fg$, 其中 f, g 是 $F[x_1, \dots, x_n]$ 的齐一次多项式. 进而, 令

$$f = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \quad g = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n,$$

其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ 不全为零, $\beta_1, \dots, \beta_n \in F$ 也不全为零. 直接计算得 p 做为 F^n 上得二次型的矩阵是

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\alpha_i \beta_j + \beta_i \alpha_j}{2} \right)_{n \times n} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_B (\beta_1, \dots, \beta_n) + \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}}_C (\alpha_1, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

于是, $\text{rank}(p) = \text{rank}(A) = \text{rank}(B + C) \leq \text{rank}(B) + \text{rank}(C) = 2$ ¹. \square

定理 8.9 设 V 的两组基是 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$, 且

$$(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)P,$$

其中 $P \in \text{GL}_n(F)$. 设 V 上的二次型 q 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A , 在 $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ 下的矩阵为 B . 则 $B = P^tAP$.

证明. 设 f 是 q 的配极. 则 A 和 B 分别是 f 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ 下的矩阵. 由第四周讲义第 20 页的内容可知, $B = P^tAP$. \square

定理 8.10 设 q 是 V 上的二次型. 则存在 V 的一组基 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 使得 q 在该基下的矩阵是对角阵. 再设该对角阵是 $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. 则对任意 $\mathbf{x} = x_1\epsilon_1 + \dots + x_n\epsilon_n \in V$,

$$q(\mathbf{x}) = \lambda_1x_1^2 + \dots + \lambda_nx_n^2. \quad (3)$$

证明. 设 q 的配极是 f . 由上一节定理 7.12 得出, f 的规范基 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$. 于是 q 在该基下的矩阵是对角阵. 设该对角阵是 $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. 则对任意的 $\mathbf{x} = x_1\epsilon_1 + \dots + x_n\epsilon_n$, $\mathbf{y} = y_1\epsilon_1 + \dots + y_n\epsilon_n \in V$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda_1x_1y_1 + \dots + \lambda_nx_ny_n$. 故 $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda_1x_1^2 + \dots + \lambda_nx_n^2$. \square

¹ $V_c(B + C) \subset V_c(B) + V_c(C) \implies \text{rank}(B + C) \leq \dim(V_c(B) + V_c(C)) \leq \dim(V_c(B)) + \dim(V_c(C)) = \text{rank}(B) + \text{rank}(C)$.

基于上述定理, 我们称 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是 q 的一组规范基, (3) 是 q 的一个规范型.

由上一节推论 7.17 可知

推论 8.11 设 q 是 V 上的二次型且 $r = \text{rank}(q)$. 则存在 q 的规范基 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 使得对任意 $\mathbf{x} = x_1\epsilon_1 + \dots + x_n\epsilon_n \in V$, $q(\mathbf{x}) = \lambda_1x_1^2 + \dots + \lambda_rx_r^2$.

例 8.12 设 $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ 是齐二次的(非零)多项式. 则 f 可以分解为两个一次多项式之积当且仅当 f 作为二次型的秩小于 3.

证明. 根据上例, 只要证明 $\text{rank}(f) < 3$ 时, f 是两个齐一次多项式之积. 设

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

则 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{C})$. 根据上周讲义例 7.20, 存在 $P = (p_{i,j}) \in \text{GL}_n(F)$ 使得

$$A = P^t \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P,$$

其中 $r = \text{rank}(A)$. 令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

则 $f(x_1, \dots, x_n) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_r^2$. 如果 $r = 1$, 则

$$f(x_1, \dots, x_n) = y_1^2 = (p_{1,1}x_1 + \dots + p_{1,n}x_n)^2.$$

如果 $r = 2$, 则

$$f(x_1, \dots, x_n) = y_1^2 + y_2^2 = (y_1 - \sqrt{-1}y_2)(y_1 + \sqrt{-1}y_2).$$

把 $y_1 = p_{1,1}x_1 + \dots + p_{1,n}x_n$ 和 $y_2 = p_{2,1}x_1 + \dots + p_{2,n}x_n$ 带入上式得到 f 的因式分解.

8.2 利用配方法化规范型

我们用一个具体的例子说明如何用配方法把一个二次型化为它的规范型.

例 8.13 设 $p = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$. 求 \mathbb{R}^3 上二次型 p 的一组规范基和一个规范型.

解. 设

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} p &= 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 \\ &= 2(y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_2^2 - 2y_3^2 \\ &= 2(y_1 + y_3)^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2. \end{aligned}$$

设

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

则 $p = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2$. 注意到

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P_1 P_2^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

设 A 是 p 在标准基下的矩阵. 则

$$\begin{aligned} p &= (x_1, x_2, x_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (z_1, z_2, z_3) (P_1 P_2^{-1})^t A (P_1 P_2^{-1}) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\ &= (z_1, z_2, z_3) \text{diag}(2, -2, -2) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是, $A \sim_c \text{diag}(2, -2, -2)$ 且规范基是

$$P_1 P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的三个列向量.