第一章　空间与形式

9.4　Jacobi 公式与正定矩阵

设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 矩阵 A 的子式

$$M\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ i_1, i_2, \ldots, i_k \end{pmatrix},$$

其中 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, 称为 A 的一个 k 阶主子式. 特别地,

$$M\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, k \\ 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix}$$

称为 A 的 k 阶顺序主子式.

例 9.18 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的顺序主子式是 $a_{1,1}$, $\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ 和 $\det(A)$.

定理 9.19 *(Jacobi 公式)* 设 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$. 设 $\Delta_0 = 1$, Δ_i 是 A 的 i 阶顺序主子式. 如果 $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ 都非零, 则

$$A \sim_c \operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right).$$

证明. 设 $A=(a_{i,j})_{n\times n}$. 对 n 归纳. 当 $n=1$ 时, $a_{1,1}=\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\right)$. 结论成立. 设 $n>1$ 且 $n-1$ 时结论成立. 设 B 是由 A 的前 $(n-1)$ 行和 $(n-1)$ 列元素组成的子矩阵. 则 B 对称且它的 $n-1$ 个顺序主子式是 $\Delta_1,\ldots,\Delta_{n-1}$. 由归纳假设可知

$$B\sim_c \underbrace{\operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0},\frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ldots,\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}\right)}_{C}.$$

于是存在 $P\in \mathrm{GL}_{n-1}(F)$ 使得 $P^tBP=C$. 令

$$Q=\begin{pmatrix} P & O_{(n-1)\times 1}\\ O_{1\times(n-1)} & 1\end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix} a_{1,n}\\ \vdots \\ a_{n-1,n}\end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} Q^tAQ &= \begin{pmatrix} P^t & O_{(n-1)\times 1}\\ O_{1\times(n-1)} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & \mathbf{v}\\ \mathbf{v}^t & a_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & O_{(n-1)\times 1}\\ O_{1\times(n-1)} & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} C & \mathbf{w}\\ \mathbf{w}^t & a_{n,n}\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{w} = P^t\mathbf{v}$. 对 Q^tAQ 用初等行伴列变换并注意到 C 对称, 我们得到

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & O_{(n-1)\times 1} \\ -\mathbf{w}^t\left(C^{-1}\right)^t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & \mathbf{w} \\ \mathbf{w}^t & a_{n,n} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} E_{n-1} & -C^{-1}\mathbf{w} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix}}_{R}$$

$$= \begin{pmatrix} C & \mathbf{w} \\ O_{1\times(n-1)} & \lambda \end{pmatrix} R, \quad \text{其中 } \lambda \text{ 是 } F \text{ 中某个元素},$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} C & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & \alpha \end{pmatrix}}_{M}, \quad \text{其中 } \alpha \text{ 是 } F \text{ 中某个元素}.$$

最后, 我们来验证 $\alpha = \Delta_n/\Delta_{n-1}$. 由上述推导得出

$$C = P^tBP \quad \text{和} \quad M = R^tQ^tAQR.$$

因为 $\det(C) = \Delta_{n-1} = \det(B)$, 所以由上述第一个等式蕴含 $\det(P)^2 = 1$. 而上述第二个等式蕴含

$$\Delta_{n-1}\alpha = \Delta_n \det(P)^2 \implies \alpha = \Delta_n/\Delta_{n-1}. \quad \square$$

定理 9.20 *设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 设 Δ_k 是 A 的 k 阶顺序主子式, $k = 1, 2, \ldots, n$. 则下列命题等价.*

(i) A 正定;

(ii) A 的任何 k 阶主子式都大于零;

(iii) $\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$.

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) 设 B 是由 A 中第 $i_1, \ldots, i_k$ 行和 $i_1, \ldots, i_k$ 列构成的子矩阵. 其中 $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$. 令 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 对任意 $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, 第 j 个坐标等于零, 第 i_ℓ 个坐标等于 x_{i_ℓ}, $\ell = 1, 2, \ldots, k$. 再令 $\mathbf{y} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})^t$. 假设 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}_k$. 则 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$. 于是

$$0 < \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = \mathbf{y}^t B \mathbf{y}.$$

由 $\mathbf{y}$ 的任意性可知, B 正定. 根据上例, $\det(B) > 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) 显然.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) 由 Jacobi 公式,

$$A \sim_c \operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right),$$

其中 $\Delta_0 = 1$. 于是 A 合同于一个对角矩阵, 其对角线上的元素都是正实数. 于是 A 的正惯性指数等于 n. □

例 9.21 设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

问 λ 为何值时 A 是正定的, A 是负定的?

解. A 的三个顺序主子式分别是

$$\Delta_1 = \lambda,\ \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1,\ \Delta_3 = \det(A) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

A 正定当且仅当 $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ 且 $\Delta_3 > 0$. 即 $\lambda > 1$.

A 负定当且仅当 $-A$ 正定. 而 $-A$ 的三个主子式是

$$\Omega_1 = -\lambda, \quad \Omega_2 = \lambda^2 - 1, \quad \Omega_3 = \det(A) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

A 负定当且仅当 $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 > 0$ 且 $\Omega_3 > 0$. 即 $\lambda < -2$.

例 9.22 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明 $\det(A)$ 不大于 A 的对角线上元素之积.

证明. 设 $A = (a_{i,j})$. 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, $A = (a_{1,1})$. 于是 $\det(A) = a_{1,1}$. 结论成立. 设 $n > 1$ 且 $n-1$ 时结论成立. 把 A 分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

由定理 *9.20 (i)* $\Longrightarrow$ *(ii)* 的证明可知, A_{n-1} 正定. 于是 $\det(A_{n-1}) \le a_{1,1} \cdots a_{n-1,n-1}$. 令

$$P = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\mathbf{v} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

则

$$P^tAP = \begin{pmatrix} A_{n-1} & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & a_{n,n} - \underbrace{\mathbf{v}^t A_{n-1}^{-1}\mathbf{v}}_{\alpha} \end{pmatrix}.$$

因为 $\det(P) = 1$, 所以上式两边取行列式得

$$\det(A) = \det(A_{n-1})(a_{n,n} - \alpha).$$

因为 A_{n-1} 正定，所以 A_{n-1}^{-1} 正定(见例 **??**)．于是 $\alpha \geq 0$．由上式和归纳假设得

$$\det(A) \leq a_{1,1} \cdots a_{n-1,n-1} a_{n,n}. \quad \square$$

例 9.23 *(Hadamard 不等式)* 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$．证明:

$$|\det(A)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2} \quad \text{和} \quad |\det(A)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2}.$$

证明. 不妨设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$．令 $M = A^t A$．由定理 **??** *(ii)* 可知 M 正定．设 $M = (m_{i,j})$．则由上例得到

$$\det(M) \leq m_{1,1} \cdots m_{n,n}.$$

注意到

$$m_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2.$$

所以

$$\det(A)^2 = \det(M) \leq \prod_{i=1}^{n} m_{i,i} = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2.$$

由此证明了第二个不等式．令 $M = AA^t$．我们可以证明第一个不等式．$\square$

10　二次曲线和曲面的仿射分类

10.1　仿射变换

在本小节中, F 是任意的域, V 是域 F 上的线性空间.

定义 10.1 设 $\phi : V \longrightarrow V$ 是线性(自)同构, $\mathbf{v} \in V$ 是一个固定的向量. 映射

$$\begin{array}{rccc} \rho : & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \end{array}$$

称为 V 上一个由 ϕ 和 $\mathbf{v}$ 定义的仿射变换 *(affine transformation)*, 其中 $\mathbf{v}$ 称为 ρ 的平移向量.

当 ϕ 是恒同映射是, ρ 称为平移变换 (translation).

命题 10.2 *(i)* 设 ρ_1, ρ_2 是 V 上两个仿射变换. 则 $\rho_2 \circ \rho_1$ 也是仿射变换.

(ii) 仿射变换可逆，且其逆也是仿射变换.

证明. (i) 设 ρ_i 由线性同构 ϕ_i 和平移向量 $\mathbf{v}_i$ 定义, $i = 1, 2$. 再设 $\mathbf{x} \in V$. 则

$$\rho_2 \circ \rho_1(\mathbf{x}) = \rho_2(\phi_1(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_1) = \phi_2(\phi_1(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2 = \phi_2 \circ \phi_1(\mathbf{x}) + \phi_2(\mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2.$$

于是 $\rho_2 \circ \rho_1$ 是由线性同构 $\phi_2 \circ \phi_1$ 和平移向量 $\phi_2(\mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2$ 定义的仿射变换.

(ii) 设 ρ 是由线性同构 ϕ 和平移向量 $\mathbf{v}$ 定义的仿射变换. 根据 (i) 的证明, 我们令 σ 是由 ϕ^{-1} 和 $-\phi^{-1}(\mathbf{v})$ 定义的仿射变换. 对任意的 $\mathbf{x}\in V$,

$$\sigma\circ\rho(\mathbf{x})=\sigma(\phi(\mathbf{x})+\mathbf{v})=\phi^{-1}(\phi(\mathbf{x})+\mathbf{v})-\phi^{-1}(\mathbf{v})=\mathbf{x}+\phi^{-1}(\mathbf{v})-\phi^{-1}(\mathbf{v})=\mathbf{x}.$$

类似地,

$$\rho\circ\sigma(\mathbf{x})=\rho(\phi^{-1}(\mathbf{x})-\phi^{-1}(\mathbf{v}))=\phi(\phi^{-1}(\mathbf{x})-\phi^{-1}(\mathbf{v}))+\mathbf{v}=\mathbf{x}-\mathbf{v}+\mathbf{v}=\mathbf{x}.$$

于是, $\rho^{-1}=\sigma$. □

注解 10.3 上述命题说明 V 上的所有仿射变换关于 $\circ$ 构成群.

例 10.4 在这个例子中我们研究 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换. 在标准基下 $\mathbb{R}^n$ 中每个向量是由 n 个坐标的列向量, 每个线性同构对应一个唯一的可逆矩阵. 于是仿射变换 ρ 可以具体的表示为

$$\begin{aligned}\rho:\quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n\\ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} &\mapsto A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中 $A\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $v_1,\ldots,v_n$ 是固定的实数.

考虑函数 $f(x_1,\ldots,x_n):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$. 在微积分中我们经常做变量替换把 f 变为另一种形式. 变量替换是一个从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的可逆映射

$$
\begin{aligned}
T:\quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n\\
\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix}y_1(x_1,\ldots,x_n)\\ \vdots\\ y_n(x_1,\ldots,x_n)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

仿射变换是一种特殊的变量替换. 利用变量替换化简函数可以用下列交换图直观地表示

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "f"] \\
& \mathbb{R},
\end{tikzcd}
$$

其中 $g=f\circ T(x_1,\ldots,x_n)=f(y_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,y_n(x_1,\ldots,x_n))$. 我们对函数 g 的知识可以通过同构 $f=g\circ T^{-1}$ 转换到成关于 f 的知识. 当然我们可能需要经过多次变换替换才能达到目的. 此时交换图表示为

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "T_1\circ\cdots\circ T_k"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "f"] \\
& \mathbb{R}.
\end{tikzcd}
$$

11　二次曲线和曲面的仿射分类

11.1　仿射变换

在本小节中, F 是任意的域, V 是域 F 上的线性空间.

定义 11.1 设 $\phi : V \longrightarrow V$ 是线性(自)同构, $\mathbf{v} \in V$ 是一个固定的向量. 映射

$$\begin{array}{rccc} \rho: & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \end{array}$$

称为 V 上一个由 ϕ 和 $\mathbf{v}$ 定义的仿射变换 *(affine transformation)*, 其中 $\mathbf{v}$ 称为 ρ 的平移向量.

当 ϕ 是恒同映射是, ρ 称为平移变换 (translation).

命题 11.2 *(i)* 设 ρ_1, ρ_2 是 V 上两个仿射变换. 则 $\rho_2 \circ \rho_1$ 也是仿射变换.

(ii) 仿射变换可逆，且其逆也是仿射变换.

证明. (i) 设 ρ_i 由线性同构 ϕ_i 和平移向量 $\mathbf{v}_i$ 定义, $i = 1, 2$. 再设 $\mathbf{x} \in V$. 则

$$\rho_2 \circ \rho_1(\mathbf{x}) = \rho_2(\phi_1(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_1) = \phi_2(\phi_1(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2 = \phi_2 \circ \phi_1(\mathbf{x}) + \phi_2(\mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2.$$

于是 $\rho_2 \circ \rho_1$ 是由线性同构 $\phi_2 \circ \phi_1$ 和平移向量 $\phi_2(\mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2$ 定义的仿射变换.

(ii) 设 ρ 是由线性同构 ϕ 和平移向量 $\mathbf{v}$ 定义的仿射变换. 根据 (i) 的证明, 我们令 σ 是由 ϕ^{-1} 和 $-\phi^{-1}(\mathbf{v})$ 定义的仿射变换. 对任意的 $\mathbf{x} \in V$,

$$\sigma\circ\rho(\mathbf{x})=\sigma(\phi(\mathbf{x})+\mathbf{v})=\phi^{-1}(\phi(\mathbf{x})+\mathbf{v})-\phi^{-1}(\mathbf{v})=\mathbf{x}+\phi^{-1}(\mathbf{v})-\phi^{-1}(\mathbf{v})=\mathbf{x}.$$

类似地,

$$\rho\circ\sigma(\mathbf{x})=\rho(\phi^{-1}(\mathbf{x})-\phi^{-1}(\mathbf{v}))=\phi(\phi^{-1}(\mathbf{x})-\phi^{-1}(\mathbf{v}))+\mathbf{v}=\mathbf{x}-\mathbf{v}+\mathbf{v}=\mathbf{x}.$$

于是, $\rho^{-1} = \sigma$. $\square$

注解 11.3 空间 V 上的所有仿射变换关于 $\circ$ 构成群.

例 11.4 在标准基下 $\mathbb{R}^n$ 中每个向量是由 n 个坐标的列向量, 每个线性同构对应一个唯一的可逆矩阵. 于是仿射变换 ρ 可以具体的表示为

$$\begin{array}{cccc}\rho: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\end{array}$$

其中 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $v_1, \ldots, v_n$ 是固定的实数.

考虑函数 $f(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. 在微积分中我们经常做变量替换把 f 变为另一种形式. 变量替换是一个从

$\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的可逆映射

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^n \quad &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} y_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ y_n(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

仿射变换是一种特殊的变量替换. 利用变量替换化简函数可以用下列交换图直观地表示

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R}, \end{tikzcd}$$

其中 $g = f\circ T(x_1,\dots,x_n) = f(y_1(x_1,\dots,x_n),\dots,y_n(x_1,\dots,x_n))$. 我们对函数 g 的知识可以通过同构 $f = g\circ T^{-1}$ 转换到成关于 f 的知识. 当然我们可能需要经过多次变换替换才能达到目的. 此时交换图表示为

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "T_1\circ\cdots\circ T_k"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

引理 11.5 设 $p\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ 的次数等于 2, 其齐 2 次部分记为 h_2. 把 p 看成从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数, h_2 看成相应的二

次型. 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换 ρ 使得

$$\begin{aligned} p\circ\rho: \quad & \mathbb{R}^n & \longrightarrow\ & \mathbb{R} \\ & \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto\ & \begin{array}{l} x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+\ell}^2 \\ -\lambda x_{k+\ell+1}-\mu, \end{array} \end{aligned}$$

其中 (k,ℓ) 是 h_2 的签名, $\lambda\in\{0,1\}$ 且 $\mu\in\mathbb{R}$.

证明. 设 $p=h_2+h_1+h_0$ 是 p 的加法分解. 则

$$p(\mathbf{x})=\mathbf{x}^tA\mathbf{x}+h_1(\mathbf{x})+h_0,$$

其中 $A\in\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 由惯性定理(矩阵版)可知, 存在 $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^tAP=\begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \tag{1}$$

. 设 $\rho_1:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 由公式 $\rho_1(\mathbf{x})=P\mathbf{x}$ 给出. 则

$$\begin{aligned} p\circ\rho_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^tP^tAP\mathbf{x}+h_1(P\mathbf{x})+h_0 \\ &\overset{(1)}{=} x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+\ell}^2 \\ &\quad +2\alpha_1x_1+\cdots+2\alpha_nx_n+h_0, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. 通过配方得

$$\begin{aligned} p \circ \rho_1(\mathbf{x}) = (x_1 + \alpha_1)^2 + \cdots + (x_k + \alpha_k)^2 \\ - (x_{k+1} - \alpha_{k+1})^2 - \cdots - (x_{k+\ell} - \alpha_{k+\ell})^2 \\ + 2\alpha_{k+\ell+1} x_{k+\ell+1} + \cdots + 2\alpha_n x_n + \xi, \end{aligned}$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}$. 考虑平移变换

$$\begin{array}{cccc} \rho_2 : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+\ell} \\ x_{x+\ell+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ x_k - \alpha_k \\ x_{k+1} + \alpha_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+\ell} + \alpha_{k+\ell} \\ x_{x+\ell+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}.$$

则

$$\begin{aligned} p \circ \rho_1 \circ \rho_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 \\ + 2\alpha_{k+\ell+1} x_{k+\ell+1} + \cdots + 2\alpha_n x_n + \xi. \end{aligned}$$

情形 1. 当 $2\alpha_{k+\ell+1} x_{k+\ell+1} + \cdots + 2\alpha_n x_n = 0$ 时, 令 $\lambda = 0$ 和 $\mu = -\xi$ 即可.

情形 2. 当 $2\alpha_{k+\ell+1}x_{k+\ell+1}+\cdots+2\alpha_n x_n\neq 0$ 时, 存在 $j\in\{k+\ell+1,k+\ell+2,\ldots,n\}$ 使得 $\alpha_j\neq 0$. 设 $m=n-(k+\ell)$. 考虑一个 m 阶可逆方阵 B, 其中 B 的第一行是 $(-2\alpha_{k+\ell+1},\ldots,-2\alpha_n)$, 其它行中的元素只有一个是 1 和其它都是 0. 特别地, 第 j 个元素一定是零. 这样的可逆矩阵显然存在. 于是

$$C=\begin{pmatrix}E_{k+\ell} & O\\ O & B\end{pmatrix}$$

是 n 阶可逆矩阵. 则 $C\mathbf{x}$ 中的第 $k+\ell+1$ 个坐标等于 $-2\alpha_{k+\ell+1}x_{k+\ell+1}-\cdots-2\alpha_n x_n$. 令 $\rho_3:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 由公式 $\rho_3(\mathbf{x})=C^{-1}\mathbf{x}$ 给出. 则

$$p\circ\rho_1\circ\rho_2\circ\rho_3(\mathbf{x})=x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+\ell}^2-x_{k+\ell+1}+\xi. \tag{2}$$

令 $\lambda=1$ 和 $\mu=-\xi$ 即可. (上式的一个计算验证过程见注释 11.6). □

注解 11.6 等式 (2) 的具体验证过程如下. 设 $\mathbf{y}=\rho_3(\mathbf{x})$, 其中 $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)^t$. 则

$$\begin{aligned}p\circ\rho_1\circ\rho_2(\mathbf{y})&=y_1^2+\cdots+y_k^2-y_{k+1}^2-\cdots-y_{k+\ell}^2\\&\quad+2\alpha_{k+\ell+1}y_{k+\ell+1}+\cdots+2\alpha_n y_n+\xi.\end{aligned}$$

注意到由 ρ_3 的定义可得:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{k+\ell} \end{pmatrix} = E_{k+\ell} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k+\ell} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} y_{k+\ell+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} x_{k+\ell+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned} p \circ \rho_1 \circ \rho_2(\mathbf{x}) &= x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 \\ &\quad + (2\alpha_{k+\ell+1}, \ldots, 2\alpha_n) B^{-1} \begin{pmatrix} x_{k+\ell+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \xi \\ &= x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 \\ &\quad - \vec{B}_1 B^{-1} \begin{pmatrix} x_{k+\ell+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \xi \\ &= x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 \\ &\quad - (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k-\ell-1}) \begin{pmatrix} x_{k+\ell+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \xi \\ &= x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 - x_{k+\ell+1} + \xi. \end{aligned}$$

验证完毕.

定理 11.7 [1] 设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 的次数等于 2, 其齐 2 次

[1]见柯斯特利金第二卷191页的推论.

部分记为 h_2. 把 p 看成从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数, h_2 看成相应的二次型. 设 $r = \operatorname{rank}(h_2)$ 和 k 是 h_2 的正惯性指数. 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换 ρ 使得

$$
\begin{array}{rccl}
p \circ \rho : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 - \mu,
\end{array}
$$

其中 $\mu \in \mathbb{R}$; 或存在 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换 ρ 使得

$$
\begin{array}{rccl}
p \circ \rho : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 - x_{r+1}
\end{array}
$$

且 $r < n$.

证明. 注意到 h_2 的负惯性指数等于 $r - k$. 当引理 11.5 中 $\lambda = 0$ 时, 我们得到第一个函数. 否则 $\lambda = 1$. 我们考虑平移 $x_i \mapsto x_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{r + 1\}$, $x_{r+1} \mapsto x_{r+1} - \mu$ 即可. $\square$

11.2 二次曲线和二次曲面分类

设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. 定义

$$S_p = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^t \in \mathbb{R}^n \mid p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0\}$$

称为由 p 定义的**超曲面**. 当 $\deg(p) = 2$ 时, S_p 称为**二次超曲面**, $\mathbb{R}^2$ 中的二次超曲面称为 **二次曲线**, $\mathbb{R}^3$ 中的二次超曲面称为**二次曲面**.

设 $\deg(p) = 2$, p 的齐二次部分等于 q, q 的秩等于 r, 签名是 (k, ℓ). 则 $r > 0$ 且 $k + \ell = r$.

首先考虑二次曲线 ($n = 2$).

情形 C_1. $r = 2$.

(1a) $(k, \ell) = (2, 0)$. $p = x_1^2 + x_2^2 - \mu$. 如果 $\mu < 0$, 则 $S_p = \emptyset$; 如果 $\mu = 0$, 则 $S_p = \{\mathbf{0}_2\}$; 如果 $\mu > 0$, 则 S_p 是(椭)圆.

(1b) $(k, \ell) = (0, 2)$. 与 (1a) 类似.

(1c) $k = 1$, $\ell = 1$. $p = x_1^2 - x_2^2 - \mu$. 如果 $\mu \neq 0$, 则 S_p 是双曲线. 如果 $\mu = 0$, 则 S_p 是两条相交于一点的直线.

情形 C_2. $r = 1$.

(2a) $k = 1$, $\ell = 0$. 如果 $p = x_1^2 - x_1$, 则 S_p 是抛物线. 如果 $p = x_1^2 - \mu$, 则 $S_p = \emptyset$ ($\mu < 0$); S_p 是两条重合的直线 ($\mu = 0$); S_p 是两条平行直线 ($\mu > 0$).

(2b) $k=0$, $\ell=1$. 与 (2a) 类似.

再考虑二次曲面 $(n=3)$.

情形 S_1**.** $r=3$.

(1a) $(k,\ell)=(3,0)$. $p=x_1^2+x_2^2+x_3^2-\mu$. 如果 $\mu<0$, 则 $S_p=\emptyset$; 如果 $\mu=0$, 则 $S_p=\{\mathbf{0}_3\}$; 如果 $\mu>0$, 则 S_p 是(椭)球面.

(1b) $(k,\ell)=(0,3)$. 与 (1a) 类似.

(1c) $(k,\ell)=(2,1)$. $p=x_1^2+x_2^2-x_3^2-\mu$. 如果 $\mu<0$, 则 S_p 是单叶双曲面. 如果 $\mu=0$, 则 S_p 是(椭)圆锥面. 如果 $\mu>0$, 则 S_p 是双叶双曲面.

情形 S_2**.** $r=2$.

(2a) $(k,\ell)=(2,0)$. 如果 $p=x_1^2+x_2^2-x_3$, 则 S_p 是椭圆抛物面; 如果 $p=x_1^2+x_2^2-\mu$, 则 $S_p=\emptyset$ $(\mu<0)$; $S_p=\{\mathbf{0}_3\}$ $(\mu=0)$; S_p (椭)圆柱面 $(\mu>0)$.

(2b) $(k,\ell)=(0,2)$. 与 (2a) 类似.

(2c) $(k,\ell)=(1,1)$. 如果 $p=x_1^2-x_2^2-x_3$, 则 S_p 是双曲抛物面. 如果 $p=x_1^2-x_2^2-\mu$, 则 S_p 是双曲柱面 $(\mu\neq0)$; S_p 是两张相交于一条直线的平面 $(\mu=0)$.

情形 S_3**.** $r=1$.

(3a) $(k,\ell)=(1,0)$. 如果 $p=x_1^2-x_2$, 则 S_p 是抛物柱面; 如果 $p=x_1^2-\mu$, 则 $S_p=\emptyset$ $(\mu<0)$; S_p 是两张重合的平面 $(\mu=0)$; S_p 是两张平行的平面 $(\mu>0)$.

(3b) $(k,\ell)=(0,1)$. 与 (3a) 类似.

12 斜对称双线性型

在本节中 F 是特征不等于 2 的域, V 是 F 线性空间.

引理 12.1 设 $f\in\mathcal{L}_2(V)$. 则 $f\in\mathcal{L}_2^-(V)$ 当且仅当对任意 $\mathbf{x}\in V$, $f(\mathbf{x},\mathbf{x})=\mathbf{0}$.

证明. 设 $f\in\mathcal{L}_2^-(V)$. 因为 $f(\mathbf{x},\mathbf{x})=-f(\mathbf{x},\mathbf{x})$, 所以 $2f(\mathbf{x},\mathbf{x})=\mathbf{0}$. 于是 $f(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$. 反之, 设对任意 $\mathbf{x}\in V$, $f(\mathbf{x},\mathbf{x})=\mathbf{0}$. 则任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$

$$
\begin{aligned}
0&=f(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y})=f(\mathbf{x},\mathbf{x})+f(\mathbf{y},\mathbf{x})+f(\mathbf{x},\mathbf{y})+f(\mathbf{y},\mathbf{y})\\
&=f(\mathbf{y},\mathbf{x})+f(\mathbf{x},\mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

由此得出 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=-f(\mathbf{y},\mathbf{x})$. □

引理 12.2 设 $f\in\mathcal{L}_2^-(V)$, $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ 使得 $f(\mathbf{u},\mathbf{v})\neq 0$, 则 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 线性无关.

证明. 因为 $f(\mathbf{u},\mathbf{v})\neq 0$, 所以 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 都不是零向量. 假设 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 线性相关. 则存在 $\alpha\in F\setminus\{\mathbf{0}\}$ 使得 $\mathbf{u}=\alpha\mathbf{v}$. 由引理 12.1 可知, $f(\mathbf{u},\mathbf{v})=f(\alpha\mathbf{v},\mathbf{v})=\alpha f(\mathbf{v},\mathbf{v})=0$. 矛盾. □

定义 12.3 设 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 使得 $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$. 则 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 称为 f 的辛平面 *(sympletic plane)*.

引理 12.4 设 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$, W 是 f 的辛平面, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是 W 的一组基. 则 $f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$.

证: 设 $W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ 使得 $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \neq 0$. 因为 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是 W 的一组基, 所以存在 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in F$ 使得

$$\mathbf{v}_1 = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 \quad \text{和} \quad \mathbf{v}_2 = \beta_1 \mathbf{w}_1 + \beta_2 \mathbf{w}_2.$$

于是

$$0 \neq f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = f(\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2, \beta_1 \mathbf{w}_1 + \beta_2 \mathbf{w}_2) = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2).$$

由此可知 $f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$. $\square$

引理 12.5 设 V 是 F 上的 n 维线性空间, $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$, W 是 f 的辛平面. 则存在 V 中子空间 $\widetilde{W}$ 满足对任意的 $\mathbf{x} \in W$, $\mathbf{y} \in \widetilde{W}$ 使得 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, 且 $V = W \oplus \widetilde{W}$.

证明. 设 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是 W 的一组基,

$$U_i = \{\mathbf{y} \in V \mid f(\mathbf{w}_i, \mathbf{y}) = 0\},$$

$i = 1, 2$. 由 f 的双线性性可知, U_1, U_2 都是子空间. 根据引理 12.4, $f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$. 于是 $\mathbf{w}_2 \notin U_1$. 由 f 的斜对称性可知 $f(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1) \neq 0$. 于是 $\mathbf{w}_1 \notin U_2$. 即 $\ell_1 = f(\mathbf{w}_1, \mathbf{y})$ 和 $\ell_2 =$

$f(\mathbf{w}_2, \mathbf{y})$ 都是关于 $\mathbf{y}$ 的非零线性函数. 于是 $\dim(\mathrm{im}(\ell_i))$=1. 进而 $U_i = \ker(\ell_i)$ 的维数是 $n-1$, $i = 1, 2$.

令 $\widetilde{W} = U_1 \cap U_2$. 则对于任意 $\mathbf{y} \in \widetilde{W}$,

$$f(\mathbf{w}_1, \mathbf{y}) = f(\mathbf{w}_2, \mathbf{y}) = 0.$$

由 f 的双线性可知, 对任意的 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$,

$$f(\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2, \mathbf{y}) = 0.$$

即对于任意 $\mathbf{x} \in W$, $\mathbf{y} \in \widetilde{W}$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

根据维数公式, 我们有

$$\dim(\widetilde{W}) = \dim(U_1)+\dim(U_2)-\dim(U_1+U_2) \geq n-1+n-1-n = n-2.$$

若 $\mathbf{w} \in W \cap \widetilde{W}$, 则存在 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ 使得 $\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2$. 又因为 $\mathbf{w} \in \widetilde{W}$, 所以

$$f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}) = 0 \implies \alpha_1 f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = 0.$$

由引理 12.1, $\alpha_1 f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) = 0$. 再由引理 12.4, $\alpha_2 = 0$. 类似地, 从 $f(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1) = 0$ 可推出 $\alpha_1 = 0$. 于是 $\mathbf{w} = 0$. 即 $W + \widetilde{W}$ 是直和. 由此可得.

$$\dim(W \oplus \widetilde{W}) = \dim(W) + \dim(\widetilde{W}) \geq 2 + n - 2 = n.$$

从而 $V = W \oplus \widetilde{W}$. □

定理 12.6 设 V 是 F 上的有限维线性空间, $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$. 则存在 f 的辛平面 $W_1, \ldots, W_k$ 和子空间 U 满足

(i) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$;

(ii) $f|_{U\times U}$ 上是零双线性型;

(iii) 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $\mathbf{x} \in W_1 \oplus \cdots \oplus W_i$, $\mathbf{y} \in W_{i+1} \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$, 我们有 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

证明. 如果 f 是零双线性型, 则取 $k = 0$ 和 $U = V$ 即可. 我们假设 f 非零且 $n = \dim(V)$. 则 $n > 1$.

对 n 归纳. 设 $n = 2$. 因为 f 非零, 所以存在 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 使得 $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. 由引理 12.2, 我们有 $V = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 是 f 的辛平面. 此时取 $W_1 = V$, $k = 1$ 和 $U = \{\mathbf{0}\}$ 即可.

设 $n > 1$ 且结论对维数小于 n 的线性空间成立. 因为 f 非零, 所以存在 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V$ 使得 $f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = 0$. 则 $W_1 = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$. 根据引理 12.5, 存在 V 的子空间 $\widetilde{W_1}$ 使得对任意 $\mathbf{x} \in W$, $\mathbf{y} \in \widetilde{W_1}$ 我们有 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ 且 $V = W_1 \oplus \widetilde{W_1}$. 考虑 $\widetilde{W_1}$ 上的斜对称双线性型 $f_1 = f|_{\widetilde{W_1}\times\widetilde{W_1}}$. 如果 f_1 是零映射, 则取 $k = 1$ 和 $U = \widetilde{W_1}$ 即可. 否则，由归纳假设存在 f_1 的辛平面 $W_2, \ldots, W_k$ 和 $\widetilde{W_1}$ 的子空间 U 使得

(i) $\widetilde{W} = W_2 \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$;

(ii) $f_1|_{U\times U}$ 上是零双线性型;

(iii) 对任意 $j \in \{2,3,\ldots,k\}$, $\mathbf{x} \in W_2 \oplus \cdots \oplus W_j$, $\mathbf{y} \in W_{j+1} \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$, 我们有 $f_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$.

则 $V = W_1 \oplus \widetilde{W} = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$. 进而 $f|_{U\times U} = f_1|_{U\times U}$ 上是零双线性型. 设 $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, $\mathbf{x} \in W_1 \oplus \cdots \oplus W_i$, $\mathbf{y} \in W_{i+1} \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$. 则 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, 其中 $\mathbf{x}_1 \in W_1$, $\mathbf{x}_2 \in W_2 \oplus \cdots \oplus W_i$. 则

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2,\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}) + f(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}) = 0+0 = 0.$$

于是, $W_1, W_2, \ldots, W_k, U$ 即为所求. □.

定理 12.7 设 V 是 F 上 n 维线性空间, $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$. 则存在 V 的一组基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 使得 f 在该基下的矩阵等于

$$M = \begin{pmatrix} S_2 & & & & \\ & S_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & S_2 & \\ & & & & O_{(n-2k)\times(n-2k)} \end{pmatrix},$$

其中

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 2k = \operatorname{rank}(f).$$

证明. 根据定理 12.6, 存在 f 的辛平面 f 的辛平面 $W_1,\ldots,W_k$ 和子空间 U 满足定理 12.6 中的三个性质. 设 $\mathbf{w}_{2i-1}, \mathbf{w}_{2i}$

是 W_i 的一组基. 根据引理 12.4, $\alpha_i = f(\mathbf{w}_{2i-1}, \mathbf{w}_{2i}) \neq 0$. 令 $\mathbf{e}_{2i-1} = \alpha_i^{-1}\mathbf{w}_{2i-1}, \mathbf{e}_{2i} = \mathbf{w}_{2i}$. 则 $f(\mathbf{e}_{2i-1}, \mathbf{e}_{2i}) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 由直和分解 $V = W_1 \oplus \cdots W_k \oplus U$ 可知, $\dim(U) = n - 2k$. 再设 $\mathbf{e}_{2k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 U 的一组基. 上述直和分解保证 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{2k-1}\mathbf{e}_{2k}, \mathbf{e}_{2k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 由定理 12.6 中的第二和第三个性质可知, f 在这组基下的矩阵为 M. □

推论 12.8 设 $A \in \mathrm{SSM}_n(F)$. 则 A 秩是偶数. 设 $\mathrm{rank}(A) = 2k$. 则

$$A \sim_c \begin{pmatrix} S_2 & & & & \\ & S_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & S_2 & \\ & & & & O_{(n-2k)\times(n-2k)} \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明. 设

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n)A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

是 F^n 上的双线性型. 因为 A 斜对称, 所以 f 斜对称. 根据定理 12.7, A 与上述矩阵合同. 于是 $\mathrm{rank}(A) = 2k$. □

例 12.9 证明 F 上奇数阶斜对称方阵的行列式等于零; 偶数阶斜对称方阵的行列式等于 F 中某个元素的平方.

证明. 设 $A \in \mathrm{SSM}_n(F)$. 如果 n 是奇数, 则推论 *12.9* 指出 A 不满秩. 于是 $\det(A)=0$. 设 n 是偶数. 如果 A 不满秩, 则结论显然成立. 否则存在 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$A = P^t \begin{pmatrix} S_2 & & & & \\ & S_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & S_2 & \\ & & & & S_2 \end{pmatrix} P, \quad \text{其中 } S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是 $\det(A) = \det(P^t)\det(S_2)^{\frac{n}{2}}\det(P) = \det(P)^2$. $\square$

例 12.10 设 A 是整数环上偶数阶斜对称满秩方阵. 证明 $\det(A)$ 是某个正整数的平方.

证明. 注意到 $A \in \mathrm{SSM}_n(\mathbb{Q})$. 由上例可知 $\det(A)=a^2$, 其中 a 是某个正有理数. 但 $\det(A) \in \mathbb{Z}^+$. 如果 a 不是整数, 则 a^2 也不是. 等式 $\det(A)=a^2$ 不可能成立. 于是 $a \in \mathbb{Z}^+$.

在上例假设条件下 $\sqrt{\det(A)}$ 称为 A 的 *Pfaffian*.