第二章　线性算子

6　不可分子空间

定义 6.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, U 是 $\mathcal{A}$-子空间. 如果 U 不能写成两个非零的 $\mathcal{A}$-子空间的直和, 则称 U 是 $\mathcal{A}$-不可分的.

命题 6.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 V 是有限个 $\mathcal{A}$-不可分子空间的直和.

证明. 设 $n = \dim(V)$. 我们对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, V 本身是 $\mathcal{A}$ 不可分的. 定理显然成立. 设 $n > 1$ 且当空间维数小于 n 时定理成立. 如果 V 是 $\mathcal{A}$ 不可分的, 则定理成立. 否则存在两个非零 $\mathcal{A}$-子空间 U, W 使得 $V = U \oplus W$. 则 $\dim(U)$ 和 $\dim(W)$ 的维数都小于 n. 由归纳假设,

$$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k,$$

其中 U_i 是 A_U 不可分的, 从而也是 $\mathcal{A}$ 不可分的. 同样, $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_\ell$, 其中 W_j 是 $\mathcal{A}_W$ 不可分的, 从而也是 $\mathcal{A}$ 不可分的. 于是

$$V = U \oplus W = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_\ell. \quad \square$$

7　特征向量和特征多项式

在本节中, V 是域 F 上的有限维线性空间且 $\dim(V)>0$.

7.1　特征向量

定义 7.1 *设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. 如果 $\langle \mathbf{v} \rangle$ 是 $\mathcal{A}$ 子空间, 则称 $\mathbf{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征向量 (eigenvector).*

命题 7.2 *设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. 则下列结论等价:*

(i) $\mathbf{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量;

(ii) $\mathcal{A}(\mathbf{v}) \in \langle \mathbf{v} \rangle$;

(iii) 存在 $\lambda \in F$ 使得 $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$.

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) 显然.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) 因为 $\mathcal{A}(\mathbf{v}) \in \langle \mathbf{v} \rangle$, 所以存在 $\lambda \in F$ 使得 $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) 设 $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{v} \rangle$. 则存在 $\alpha \in F$ 使得 $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{v}$. 于是,

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\alpha \mathbf{v}) = \alpha \mathcal{A}(\mathbf{v}) = \alpha \lambda \mathbf{v} \in \langle \mathbf{v} \rangle \Longrightarrow \langle \mathbf{v} \rangle \text{ 是 } \mathcal{A} \text{ 不变的.} \quad \square$$

从上述命题可知 $\mathbf{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 特征向量当且仅当存在 $\lambda \in F$ 使得 $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. 我们称 λ 是关于特征向量 $\mathbf{v}$ 的特征值

(eigenvalue). 简称 $\mathcal{A}$ 的特征根. 反之, 设 $\lambda \in F$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值. 令

$$V^\lambda = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}\}$$

称为 $\mathcal{A}$ 关于 λ 的特征子空间(eigenspace). 下面我们来验证 V^λ 是 $\mathcal{A}$-子空间.

设 $\alpha, \beta \in F$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V^\lambda$. 则

$$\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha\mathcal{A}(\mathbf{x})+\beta\mathcal{A}(\mathbf{y}) = \alpha\lambda\mathbf{x}+\beta\lambda\mathbf{y} = \lambda(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}).$$

由此可知 $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y} \in V^\lambda$. 即 V^λ 是子空间. 因为

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} \in V^\lambda,$$

所以 V^λ 是 $\mathcal{A}$ 不变的.

例 7.3 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 中的导数算子. 求 $\mathcal{D}$ 所有特征值和特征向量.

解. 设 $f = f_d x^d + \cdots + f_1 x + f_0$, 其中 $f_d, \ldots, f_1, f_0 \in \mathbb{R}$ 且 $f_d \neq 0$. 如果 $\mathcal{D}(f) = \lambda f$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}$. 则

$$d f_d x^{d-1} + \cdots + f_1 = \lambda(f_d x^d + \cdots + f_1 x + f_0).$$

上式成立当且仅当 $\lambda = 0$ 且 $d = 0$. 于是, f 是 $\mathcal{D}$ 的特征向量当且仅当 $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 这些特征向量对应的特征值是 0. 而 $V^0 = \mathbb{R}$. □

当我们把矩阵 $A \in \mathrm{M}_n(F)$ 看成 $\mathcal{L}(F^n)$ 中由 $A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 定义得线性算子时, 我们同样有矩阵 A 的特征向量, 特征值和特征子空间的概念.

命题 7.4 *设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $A \in \mathrm{M}_n(F)$ 是 $\mathcal{A}$ 在 V 的基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 设 $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n$, 其中 $v_1, \ldots, v_n \in F$ 不全为零. 则 $\mathbf{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量当且仅当 $(v_1, \ldots, v_n)^t$ 是 A 的特征向量. 此时 $\mathbf{v}$ 和 $(v_1, \ldots, v_n)^t$ 对应的特征值相同.*

证明. 设 $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, 其中 $\lambda \in F$. 则

$$\lambda(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)^t = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)A(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)^t.$$

对上式取坐标得

$$\lambda(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)^t = A(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)^t.$$

即 $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)^t$ 是 A 关于特征值 λ 得特征向量. 上述过程项然可以反转. □

例 7.5 *求数乘矩阵的特征向量和特征值.*

解. *设 $A = \lambda E$, 其中 $\lambda \in F$. 则对任意 $\mathbf{x} \in F^n$,*

$$A\mathbf{x} = \lambda E\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

于是, 任何 F^n 中的非零向量都是 A 的特征向量, 它们对应的特征值都是 λ. 进而, $V^\lambda = F^n$. □

例 7.6 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 且 $\ker(\mathcal{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$. 证明: 0 是 $\mathcal{A}$ 的特征值且 $V^0 = \ker(\mathcal{A})$.

证明. 设 $\mathbf{v} \in \ker(\mathcal{A}) \setminus \{\mathbf{0}\}$. 则 $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}$. 于是, 0 是 $\mathcal{A}$ 的特征值. 设 $\mathbf{x} \in \ker(\mathcal{A})$. 则 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 即 $\mathbf{x} \in \ker(\mathcal{A})$. 反之, 设 $\mathbf{y} \in V^0$. 则 $\mathcal{A}(\mathbf{y}) = 0\mathbf{y} = \mathbf{0}$. 于是 $\mathbf{y} \in \ker(\mathcal{A})$. 由此得出 $V^0 = \ker(\mathcal{A})$. □

7.2 特征多项式

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵等于 A. 设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, 其中 $x_1, \ldots, x_n \in F$ 不全等于零. 则 $\mathbf{x}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量当且仅当存在 $\lambda \in F$ 使得 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$, 即

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff (\lambda E - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由此推出 $\mathbf{x}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量蕴含 $\det(\lambda E - A) = 0$.

设 $\chi_A(t) = \det(tE - A) \in F[t]$. 则 $\mathbf{x}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量蕴含着它对应的特征值 λ 是 $\chi_A(t)$ 的根. 反之, 设 $\lambda \in F$ 是 $\chi_A(t)$ 的根. 则方程组

$$(\lambda E - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

由非零解 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. 于是, $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n$ 满足 $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. 由此推出 $\lambda \in F$ 是 $\chi_A(t)$ 的根当且仅当 λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值.

定义 7.7 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$, t 是 F 上的未定元. 多项式

$$\det(tE - A) \in F[t]$$

称为 A 的特征多项式, 记为 $\chi_A(t)$.