

第二章 线性算子

定理 9.3 (循环子空间分解) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则存在 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell \in V \setminus \{0\}$ 使得

$$V = (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}_1) \oplus \cdots \oplus (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}_\ell).$$

证明. 设 $n = \dim(V)$. 我们对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, V 是 \mathcal{A} -循环的. 结论成立. 设 $n > 1$ 且结论对维数小于 n 的任何线性空间成立.

考虑 n 维情形. 如果 V 是 \mathcal{A} -循环的, 取 $\ell = 1$ 即可. 否则, 存在 $\mathbf{w} \in V$ 使得 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$ 在所有 \mathcal{A} 循环子空间中维数最大. 设该维数等于 m . 则 $0 < m < n$. 我们将构造一个 \mathcal{A} -子空间 W 使得 $V = (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}) \oplus W$. 然后把归纳假设用到 W 上即可.

把 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$ 的基底 $\mathbf{w}, \mathcal{A}(\mathbf{w}), \dots, \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})$ 扩充为 V 的一组基 $\mathbf{w}, \mathcal{A}(\mathbf{w}), \dots, \mathcal{A}^{m-2}(\mathbf{w}), \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w}), \epsilon_{m+1}, \dots, \epsilon_n$. 由线性映射基本定理 II, 存在唯一的线性函数 $f \in V^*$ 满足

$$f(\mathcal{A}^i(\mathbf{w})) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-2,$$

和

$$f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})) = 1, \quad f(\epsilon_j) = 0, \quad j = m+1, \dots, n.$$

设 $f_k = f \circ \mathcal{A}^k, k = 0, 1, \dots, m-1$, 且

$$W = \bigcap_{k=0}^{m-1} \ker(f_k).$$

我们来验证以下三个断言.

(i) $\dim(W) = n - m;$

(ii) $(F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}) \cap W = \{\mathbf{0}\};$

(iii) W 是 \mathcal{A} -不变的.

断言 (i) 和 (ii) 保证 $V = (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}) \oplus W$. 而断言 (iii) 保证归纳假设可以应用到 W 上.

验证断言 (i). 我们首先看 f_k 在基底

$$\mathbf{w}, \mathcal{A}(\mathbf{w}), \dots, \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w}), \epsilon_{m+1}, \dots, \epsilon_n \quad (1)$$

下的矩阵, $k = 0, 1, \dots, m - 1$. 线性函数 $f_0 = f$ 在基底 (1) 和 1 下的矩阵是

$$\begin{aligned} &= (f(\mathbf{w}), \dots, f(\mathcal{A}^{m-2}(\mathbf{w})), f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})), f(\epsilon_{m+1}), \dots, f(\epsilon_n)) \\ &= (1) \underbrace{(0, \dots, 0)}_{m-1}, 1, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-m} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{m-1}, 1, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-m} =: B_0 \end{aligned}$$

而 f_k 在基底 (1) 下的矩阵是

$$\begin{aligned} &= (f(\mathcal{A}^k(\mathbf{w})), \dots, f(\mathcal{A}^{m-2}(\mathbf{w})), f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})), \\ &\quad f(\mathcal{A}^m(\mathbf{w})), \dots, f(\mathcal{A}^{m-1+k}(\mathbf{w})), f(\mathcal{A}^k(\epsilon_{m+1})), \dots, f(\mathcal{A}^k(\epsilon_n))) \\ &= (1) \underbrace{(0, \dots, 0)}_{m-k-1}, 1, \underbrace{(*, \dots, *)}_{n-m+k} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{m-k-1}, 1, \underbrace{(*, \dots, *)}_{n-m+k} := B_k, \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots, m - 1$. 设 $\mathbf{x} \in V$ 在基底 (1) 下的坐标是 $(x_1, \dots, x_n)^t$. 则

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_0(\mathbf{x}) \\ f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_{m-1}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 1 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & \cdots & * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

于是, $\bigcap_{i=0}^{m-1} \ker(f_i)$ 的维数等于以 C 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间的维数, 即 $n - \text{rank}(C) = n - m$.

验证断言 (ii). 设 $\mathbf{x} \in (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}) \cap W$ 且 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. 则存在 $p \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p \in F$, $\alpha_p \neq 0$, 使得

$$\mathbf{x} = \alpha_0 \mathbf{w} + \alpha_1 \mathcal{A}(\mathbf{w}) + \cdots + \alpha_p \mathcal{A}^p(\mathbf{w}).$$

则

$$\begin{aligned} 0 &= f_{m-1-p}(\mathbf{x}) \\ &= \alpha_0 f_{m-1-p}(\mathbf{w}) + \cdots + \alpha_{p-1} f_{m-1-p}(\mathcal{A}^{p-1}(\mathbf{w})) + \alpha_p f_{m-1-p}(\mathcal{A}^p(\mathbf{w})) \\ &\quad (f_{m-1-p} \text{ 线性}) \\ &= \alpha_0 f(\mathcal{A}^{m-1-p}(\mathbf{w})) + \cdots + \alpha_{p-1} f(\mathcal{A}^{m-2}(\mathbf{w})) + \alpha_p f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})) \\ &\quad (f_0, \dots, f_p \text{ 和 } \mathbf{w} \text{ 的定义}) \\ &= \alpha_p. \end{aligned}$$

矛盾. 断言 (ii) 成立.

验证断言 (iii). 设 $\mathbf{x} \in W$. 则对任意 $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$,

$$f_k(\mathbf{x}) = f(\mathcal{A}^k(\mathbf{x})) = 0.$$

设 $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$. 则对任意 $k \in \{0, 1, \dots, m-2\}$,

$$f_k(\mathbf{y}) = f_k(\mathcal{A}(\mathbf{x})) = f_{k+1}(\mathbf{x}) = 0.$$

还需要验证 $f_{m-1}(\mathbf{y}) = 0$. 由 m 的极大性可知,

$$\dim(F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{x}) \leq m.$$

根据第二章第四讲命题 9.2 (iii), 存在 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1} \in F$, 使得

$$\mathcal{A}^m(\mathbf{x}) = \beta_0 \mathbf{x} + \beta_1 \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \cdots + \beta_{m-1} \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{x}).$$

于是

$$\begin{aligned} f_{m-1}(\mathbf{y}) &= f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{y})) \quad (f_{m-1} \text{ 的定义}) \\ &= f(\mathcal{A}^m(\mathbf{x})) \quad (\mathbf{y} \text{ 的定义}) \\ &= f(\beta_0\mathbf{x} + \beta_1\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \cdots + \beta_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{x})) \quad (\text{见上式}) \\ &= \beta_0f(\mathbf{x}) + \beta_1f(\mathcal{A}(\mathbf{x})) + \cdots + \beta_{m-1}f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{x})) \quad (f \text{ 线性}) \\ &= \beta_0f_0(\mathbf{x}) + \beta_1f_1(\mathbf{x}) + \cdots + \beta_{m-1}f_{m-1}(\mathbf{x}) \\ &\quad (f_0, f_1, \dots, f_{m-1} \text{ 的定义}) \\ &= 0 \quad (\mathbf{x} \in W). \end{aligned}$$

于是 $\mathbf{y} \in W$. 断言 (iii) 成立. \square

定义 9.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathbf{v} \in V$. 如果 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$, 则称 \mathcal{A} 是 V 上的循环算子, \mathbf{v} 是 V 中的循环向量, V 是关于 \mathcal{A} 和 \mathbf{v} 的循环空间. 简称 \mathcal{A} -循环空间.

例 9.5 考虑导数算子 $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[x]^{(n)})$. 则

$$\mathcal{D}^i(x^{n-1}) = \alpha_i x^{n-i-1}, \quad \text{其中 } \alpha_i \in (F \setminus \{0\}), i = 0, 1, \dots, n-1.$$

于是,

$$x^{n-1}, \mathcal{D}(x^{n-1}), \dots, \mathcal{D}^{n-1}(x^{n-1})$$

是 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 的一组基. 由此得出 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 是关于 \mathcal{D} -循环空间.

定理 9.6 设 $\dim(V) = n$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 V 是 \mathcal{A} -循环的当且仅当 $\mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}$.

证明. 设 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$. 则, $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})$ 是 V 的一组基. 则存在 $f_0, f_1, \dots, f_{n-1} \in F$ 使得

$$\mathcal{A}^n(\mathbf{v}) = -f_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v}) - \dots - f_1\mathcal{A}(\mathbf{v}) - f_0\mathbf{v}.$$

令 $f(t) = t^n + f_{n-1}t^{n-1} + \dots + f_1t + f_0 \in F[t]$. 则 $f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

断言. $\mu_{\mathcal{A}}(t) = f(t)$.

断言的证明. 设 \mathbf{x} 是 V 中任何向量. 存在 $p \in F[t]$ 使得 $\mathbf{x} = p(\mathcal{A})(\mathbf{v})$ (命题 9.2 (i)). 则

$$f(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = f(\mathcal{A})p(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = p(\mathcal{A})f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = p(\mathcal{A})(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

由 \mathbf{x} 的任意性可知, $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. 于是, $\mu_{\mathcal{A}}|f$ (第二章第二讲引理 4.2). 假设 $\deg(\mu_{\mathcal{A}}) = d < n$. 设

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = t^d + \alpha_{d-1}t^{d-1} + \dots + \alpha_0, \quad \text{其中 } \alpha_{d-1}, \dots, \alpha_0 \in F.$$

由 $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ 得出 $\mathcal{A}^d(\mathbf{v}) + \alpha_{d-1}\mathcal{A}^{d-1}(\mathbf{v}) + \dots + \alpha_0\mathbf{v} = \mathbf{0}$. 但这与 $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})$ 是 V 的一组基相矛盾. 故 $\deg(\mu_{\mathcal{A}}) \geq n$. 由此和 $\mu_{\mathcal{A}}|f$ 可推出 $\mu_{\mathcal{A}} = f$. 断言成立.

我们来计算 \mathcal{A} 在基底 $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})$ 下的矩阵

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{A}(\mathbf{v}), \mathcal{A}^2(\mathbf{v}), \dots, \mathcal{A}^n(\mathbf{v})) \\
 &= (\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -f_{n-1} \end{pmatrix}}_A.
 \end{aligned}$$

直接计算得 $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_A(t) = f(t)$ (见注记 9.7. 故 $\mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}$.)

反之, 因为 $\mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}$, 所以 $\deg(\mu_{\mathcal{A}}) = n$. 由科斯特利金第二卷第 56 页习题 9 (ii), 存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mu_{\mathcal{A}, \mathbf{v}} = \mu_{\mathcal{A}}$. 由此得出, $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})$ 是 V 的一组基. 故 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$.

□

注解 9.7 以下是计算 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 的过程:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & f_0 \\ -1 & t & 0 & \cdots & 0 & f_1 \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t & f_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & t + f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

我们用数学归纳法来证明

$$\chi_A(t) = t^n + f_{n-1}t^{n-1} + \cdots + f_1t + f_0.$$

当 $n = 1$ 时, $\chi_A(t) = t + f_0$. 结论成立. 设 $n > 1$ 且结论对 $n - 1$ 成立. 把上述行列式按第一行展开得

$$\chi_A(t) = t \det \begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & f_1 \\ -1 & t & \cdots & 0 & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t & f_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t + f_{n-1} \end{pmatrix} \\ + (-1)^{n-1} f_0 \det \begin{pmatrix} -1 & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & t & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

由归纳假设可知

$$\chi_A(t) = t(t^{n-1} + f_{n-1}t^{n-2} + \cdots + f_1) + f_0 = f(t). \quad \square$$

由这一结论可知, 任何一个首一且次数为正的多项式都是某个矩阵的特征多项式.

定理 9.8 (Hamilton-Cayley 定理的加强版) 设 $A \in \mathcal{L}(V)$. 则

(i) $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, 即 $\mu_{\mathcal{A}}(t) | \chi_{\mathcal{A}}(t)$;

(ii) $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 在 $F[t]$ 中的不可约因子都是 $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ 的因子.

证明. 由循环子空间分解定理,

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_\ell,$$

其中 U_1, \dots, U_ℓ 是非零的 \mathcal{A} -循环子空间. 特别地, U_1, \dots, U_ℓ 是 \mathcal{A} -不变的(第二章第四讲命题 9.2 (ii)). 令

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{U_i}, \quad \mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}, \quad \chi_i = \chi_{\mathcal{A}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, \ell.$$

根据第二章第三讲定理 5.9, \mathcal{A} 在 V 的某组基下的矩阵是:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_\ell \end{pmatrix}.$$

且

$$\mu_{\mathcal{A}} = \text{lcm}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell).$$

由第二章第三讲例 7.14,

$$\chi_{\mathcal{A}} = \chi_1 \chi_2 \cdots \chi_\ell.$$

由定理 9.6, $\mu_i = \chi_i$, $i = 1, 2, \dots, \ell$. 故上式可以写为:

$$\chi_{\mathcal{A}} = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_\ell.$$

于是, $\mu_A(t) | \chi_A(t)$. (i) 成立. 设 p 是 χ_A 的一个不可约因子. 则 p 整除某个 μ_i (见上学期第五章第二讲引理 3.4). 由此可知, $p | \mu_A$ \square

注解 9.9 设 $A \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_A = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$ 是 μ_A 在 $F[t]$ 中的不可约分解. 则 χ_A 在 $F[t]$ 中的不可约分解是

$$\chi_A = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s},$$

其中 $m_1 \leq n_1, \dots, m_s \leq n_s$ 且 $n_1 \deg(p_1) + \cdots + n_s \deg(p_s) = n$.

推论 9.10 设 $A \in M_n(F)$. 则

(i) $\mu_A(t) | \chi_A(t)$;

(ii) $\chi_A(t)$ 在 $F[t]$ 中的不可约因子都是 $\mu_A(t)$ 的因子.

例 9.11 利用上述定理, 我们有以下结论.

(i) 对合算子在某组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & -E_\ell \end{pmatrix}.$$

(ii) 幂零算子的特征根都等于零, 但非零的幂零算子不可能对角化.

例 9.12 设

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}.$$

计算 A^{66} .

解. 计算得 $\chi_A(t) = t^2 + t$. 由 *Hamilton-Cayley* 定理, $A^2 = -A$. 于是,

$$\begin{aligned} A^{66} &= (A^2)^{33} = -A^{33} = -AA^{32} = -AA^{16} \\ &= -AA^8 = -AA^4 = -AA^2 = (-A)(-A) = A^2 = -A. \end{aligned}$$

我们得到

$$A^{66} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}. \quad \square$$

另解. 由对角化可知,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP,$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}A^{66}P \implies A^{66} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}. \quad \square$$

引理 9.13 (不可分子空间判定准则) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, U 是 \mathcal{A} -子空间. 则 U 是 \mathcal{A} -不可分的当且仅当下述两个条件都成立.

(i) U 是 \mathcal{A} -循环子空间;

(ii) $\mu_{\mathcal{A}_U}$ 是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次.

证明. 设 U 是 \mathcal{A} -不可分子空间. 则 U 是 \mathcal{A} -子空间. 根据定理 9.3, U 是若干 \mathcal{A}_U -循环子空间的直和, 也是若干 \mathcal{A} -循环子空间的直和. 因为 U 是 \mathcal{A} -不可分子空间, 所以直和项只有一个, 即 U 是 \mathcal{A} -循环的. 进而, $\mu_{\mathcal{A}_U}$ 是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次. 否则, 由补充材料中推论 1.2 或核分解定理可知, U 关于 \mathcal{A}_U 的核分解的直和项不止一个, 与 U 是 \mathcal{A} -不可分子空间矛盾.

反之, 设条件 (i) 和 (ii) 满足. 设 $\mu_{\mathcal{A}_U} = p^m$, 其中 $p \in F[t]$ 不可约, $m > 0$. 因为 U 是 \mathcal{A} -循环子空间, 所以 U 是 \mathcal{A}_U -循环空间. 由第二章第四讲引理 9.5,

$$\dim(U) = m \deg(p).$$

假设 $U = U_1 \oplus U_2$, 其中 U_1, U_2 是正维数的 \mathcal{A} -子空间. 则它们也是 \mathcal{A}_U -子空间. 则 $\mu_{\mathcal{A}_{U_1}} | p^m$ 且 $\mu_{\mathcal{A}_{U_2}} | p^m$ (第二章第二讲引理 4.2). 但

$$p^m = \text{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_{U_1}}, \mu_{\mathcal{A}_{U_2}})$$

(第二章第三讲引理 5.7). 于是, $\mu_{\mathcal{A}U_1}, \mu_{\mathcal{A}U_2}$ 至少有一个等于 p^m . 不妨设 $\mu_{\mathcal{A}U_1} = p^m$, 根据 Hamilton-Cayley 定理, $\chi_{\mathcal{A}U_1}$ 有因子 p^k , 其中 $k \geq m$. 于是,

$$\dim(U_1) \geq m \deg(p) = \dim(U).$$

矛盾. \square

定理 9.14 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则存在 \mathcal{A} -不可分子空间 W_1, \dots, W_k 使得

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

且 W_i 是 \mathcal{A} -循环的, $\mu_{\mathcal{A}W_i}$ 是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次, $i = 1, 2, \dots, k$.

证明. 结合引理 10.6 和第二章第三讲命题 6.2 即可. \square

例 9.15 设 \mathcal{D} 是 $R[x]^{(n)}$ 上的导数算子. 则 $\mu_{\mathcal{D}} = t^n$ 且 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 是 \mathcal{D} -循环的 (第二章第四讲定理 9.11). 于是, $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 是 \mathcal{D} -不可分的. \square